Amérique du Sud 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(1, 0, -2)$. D'autre part, la droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(4, -1, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Donc les droites Δ et (AC) sont orthogonales. L'affirmation 1 est vraie.

2) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, 3, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $3 = 0 \times k$ (à partir de la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C déterminent un plan.

- $2x_A + 5y_A + z_A - 5 = 2 \times 3 + 5 \times (-1) + 4 - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0$.
- $2x_B + 5y_B + z_B - 5 = 2 \times (-1) + 5 \times 2 + (-3) - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0$.
- $2x_C + 5y_C + z_C - 5 = 2 \times 4 + 5 \times (-1) + 2 - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0$.

Les trois points A, B et C appartiennent au plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$. L'affirmation 2 est vraie.

3) Par exemple, si $s = s' = 0$, le point M_0 correspondant est $(1, 1, 1)$ et ce point n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car $2x_M - 3y_M + 2z_M - 7 = 2 - 3 + 2 - 7 = -6 \neq 0$. L'affirmation 3 est fausse.

4) Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 4 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 2 = 15 \neq 0.$$

Donc la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}$ puis la droite Δ est sécante à tout plan parallèle à $\mathscr{P}$. On en déduit qu'aucun plan parallèle à $\mathscr{P}$ ne contient la droite Δ. L'affirmation 4 est fausse.

