France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) $a_1 = a_0 - 0,2a_0 + 0,1b_0 = 0,8a_0 + 0,1b_0 = (0,8+0,1) \times 0,5 = 0,9 \times 0,5 = 0,45$ et $b_1 = b_0 - 0,1b_0 + 0,2a_0 = 0,9b_0 + 0,2a_0 = (0,9+0,2) \times 0,5 = 0,55$. Donc,

$$\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = a_n - 0,2a_n + 0,1b_n = 0,8a_n + 0,1b_n,$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0,1b_n + 0,2a_n = 0,2a_n + 0,9b_n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.}$$

d) D'après le résultat admis par l'énoncé, $U_3 = M^3U_0 = M^2 \times MU_0 = M^2 \times U_1$. Donc,

$$\begin{aligned} U_3 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,8 + 0,1 \times 0,2 & 0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,9 \times 0,2 & 0,2 \times 0,1 + 0,9 \times 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 \\ 0,34 & 0,83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 \times 0,45 + 0,17 \times 0,55 \\ 0,34 \times 0,45 + 0,83 \times 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a_3 = 0,3905 \text{ et } b_3 = 0,6095.}$$

2) a)

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2. \end{aligned}$$

Donc $P \times \left(\dfrac{1}{3}P\right) = \left(\dfrac{1}{3}P\right) \times P = I_2$. Ceci montre que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- D'après la question précédente, $P^{-1}MP = D$. Donc $PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$ puis $I_2MI_2 = PDP^{-1}$ et finalement $M^1 = PDP^{-1}$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M \times M^n \\
&= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}.
\end{aligned}$$

On a montré récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1+2\times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{1-0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{1+2\times 0,7^n}{3} + \frac{1-0,7^n}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2+0,7^n}{3} \\
&= \frac{2+0,7^n}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2-2\times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{2+0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{2-2\times 0,7^n}{3} + \frac{2+0,7^n}{3}\right) \\
&= \frac{4-0,7^n}{6}
\end{aligned}$$

Puisque $-1 < 0,7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la répartition des souris dans les compartiments A et B de la cage se stablisera, environ $\frac{1}{3}$ des souris occupant le compartiment A et $\frac{2}{3}$ des souris occupant le compartiment B.

