

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100} \times u_n = 0,8u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_n < \frac{1}{100} \times u_0 &\Leftrightarrow 10 \times 0,8^n < 0,01 \times 10 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) < \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n > 20,6\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure à 1 % de la quantité initiale au bout de 21 minutes.

2) a) Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68	1,34	1,07	0,86	0,69	0,55	0,44	0,35

b) En 15 minutes, il a été injecté 10 ml de médicament puis 4 ml à la minute n° 4 puis 4 ml à la minute n° 7 puis 4 ml à la minute n° 10 et encore 4 ml à la minute n° 13. Au total, il a été injecté $10 + 4 + 4 + 4 + 4 = 26$ ml de médicament.

c) Algorithme modifié.

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 30 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v \leq 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$ Afficher v Fin de boucle

3) a) Soit n un entier naturel. w_{n+1} est obtenu en enlevant à w_n 20 % de sa valeur puis en ajoutant 1 ml de médicament. Donc

$$w_{n+1} = w_n - 0,2w_n + 1 = 0,8w_n + 1.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8w_n - 4 = 0,8 \left(w_n - \frac{4}{0,8} \right) = 0,8(w_n - 5) = 0,8z_n.$$

De plus, $z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$. On a montré que la suite (z_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et le premier terme $z_0 = 5$.

c) On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 5 + z_n = 5 + 5 \times 0,8^n.$$

Pour tout entier naturel n , $w_n = 5 + 5 \times 0,8^n$.

d) Puisque $-1 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5 + 5 \times 0 = 5$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5.$$

Ceci signifie qu'au bout d'un long moment, la quantité de médicament dans le sang sera à peu près constante, égale à environ 5 ml.