# Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

**EXERCICE 4 (5 points) (réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Un graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction $f$ qui à tout nombre complexe $z$ associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

**1)** Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction $f$.

**2)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points $A$ et $B$ dont l'affixe est solution de l'équation ($A$ étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

**3)** Soit $\lambda$ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue $z$.

Déterminer l'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

**4)** Soit $(F)$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que $(F)$ est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer $(F)$ sur le graphique.

**5)** Soit $z$ un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels.

**a)** Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

**b)** On note $(E)$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que $(E)$ est la réunion de deux droites $D_1$ et $D_2$ dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

**6)** Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles $(E)$ et $(F)$.

 