Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1)

$$f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+i\sqrt{3}\right)+9=1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+9=5.$$

$$\boxed{f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=5.}$$

2) Pour tout nombre complexe z, $f(z)=5\Leftrightarrow z^2+2z+4=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+4=0$ est $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$. L'équation $z^2+2z+4=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1=\dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2}=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}$.

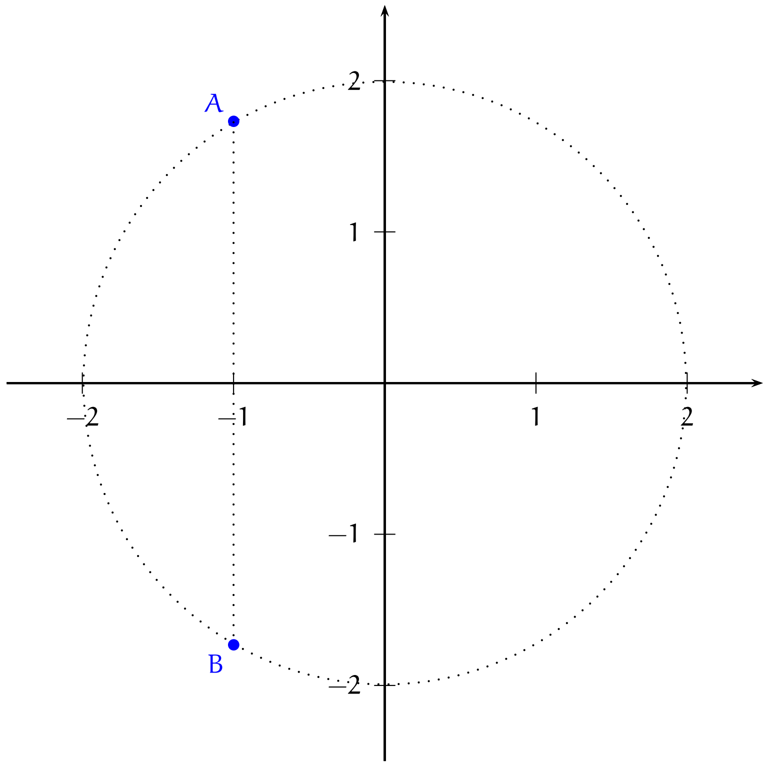
$|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ puis

$$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et aussi $z_2=\overline{z_1}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(z)=5 \text{ sont } z_1=-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

Figure. A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'abscisse -1 et d'ordonnée positive.



3) Soit λ un nombre réel. Pour tout nombre complexe z, $f(z)=\lambda\Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+9-\lambda=0$ est

$$\Delta=2^2-4\times1\times(9-\lambda)=4\lambda-32.$$

L'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\Delta<0$ ce qui équivaut à $4\lambda-32<0$ ou enfin à $\lambda<8$.

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est }]-\infty,8[.}$$

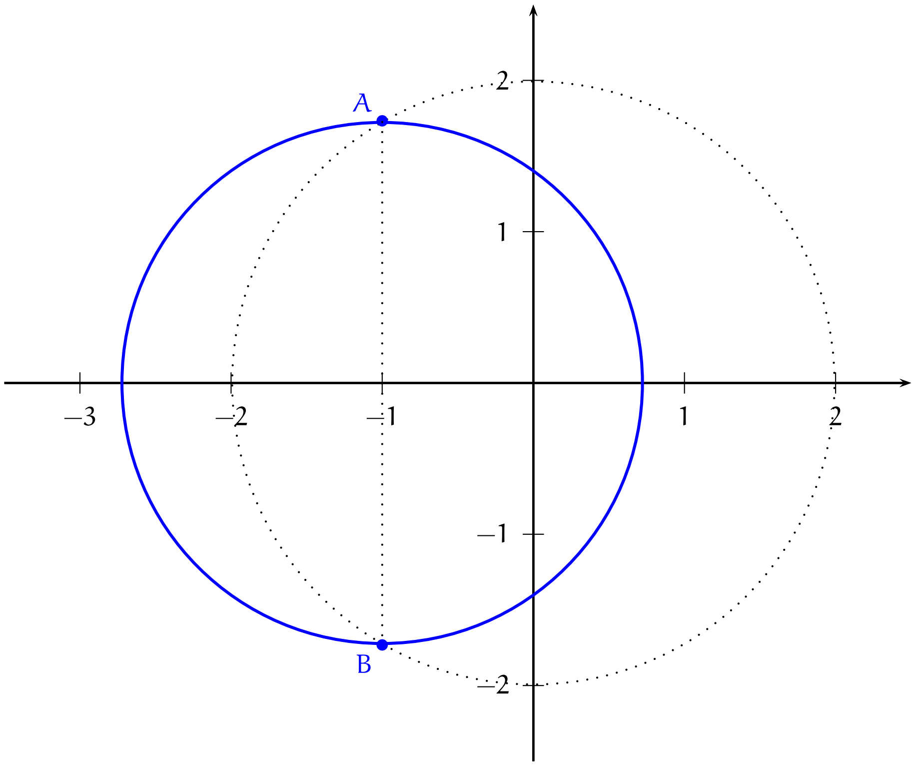
4) Soit z un nombre complexe. Soit M le point du plan d'affixe z.

$$|f(z)-8| = 3 \Leftrightarrow \left|z^2+2z+1\right| = 3 \Leftrightarrow \left|(z+1)^2\right| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow |z-(-1)| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}.$$

Donc, (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. On note que les points A et B appartiennent à (F) car

$$f(z_1) = 5 \Rightarrow f(z_1) - 8 = -3 \Rightarrow |f(z_1) - 8| = 3,$$

et de même pour z_2.



5) a) Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$$f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b) Par suite,

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1.$$

(E) est la réunion de la droite D_1 d'équation $y = 0$ et de la droite D_2 d'équation $x = -1$. Voir graphique à la fin.

6) • Soit $M(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ puis $z = x$ l'affixe de M.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \text{ ou } x+1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1+\sqrt{3} \text{ ou } x = -1-\sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et $\mathscr{D}_1$ sont les points $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

• Soit $M(-1,y)$, $y \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$ puis $z = iy$ l'affixe de M.

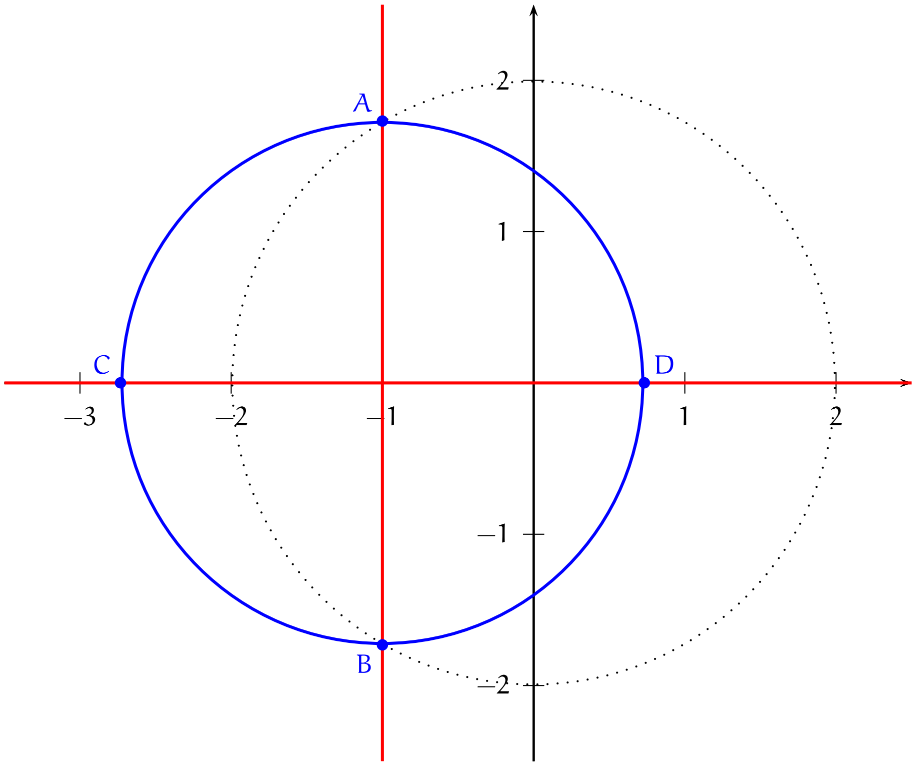
$$M \in (F) \Leftrightarrow |-1+iy+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |iy| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |i| \times |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et $\mathscr{D}_2$ sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$ et $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

Finalement, les points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

Remarque. On devait obtenir au moins les points A et B car par exemple, d'après 2),

$$f(z_A) = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ f(z_A) - 8 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ |f(z_A) - 8| = 3 \end{array}\right. \Rightarrow A \in (E) \cap (F).$$



A
C
D
B
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2

