Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x strictement positif,

$$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln\left(x^n\right) \Leftrightarrow x = n\ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

Donc, sur $]0,+\infty[$, l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$.

• La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx} = -\frac{x-n}{nx}.$$

La fonction f_n' est strictement positive sur $]0,n[$ et strictement négative sur $]n,+\infty[$. On en déduit que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0,n]$ et strcitement décroissante sur $[n,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{n} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x) - \dfrac{x}{n}\right) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln(x) = -\frac{x}{n}\left(1 - \frac{n}{x}\times\ln(x)\right) = -\frac{x}{n}\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1 - n\times 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{n} = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $f_n(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

• On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_n :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n)-1$	$\searrow$	$-\infty$

On note que la fonction f_n admet un maximum en n égal à $\ln(n) - 1$.

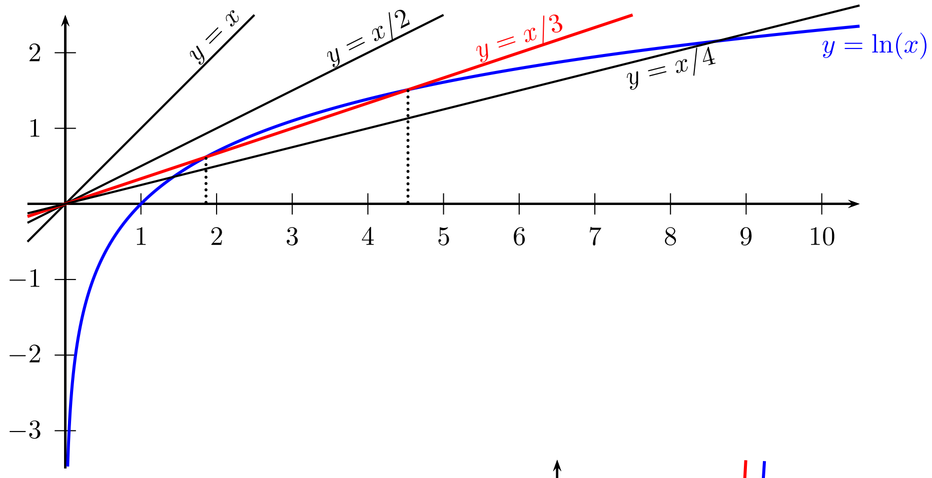
• $f_n(n) < 0 \Leftrightarrow \ln(n) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(n) < 1 \Leftrightarrow n < e$ et $f_n(n) > 0 \Leftrightarrow n > e$.

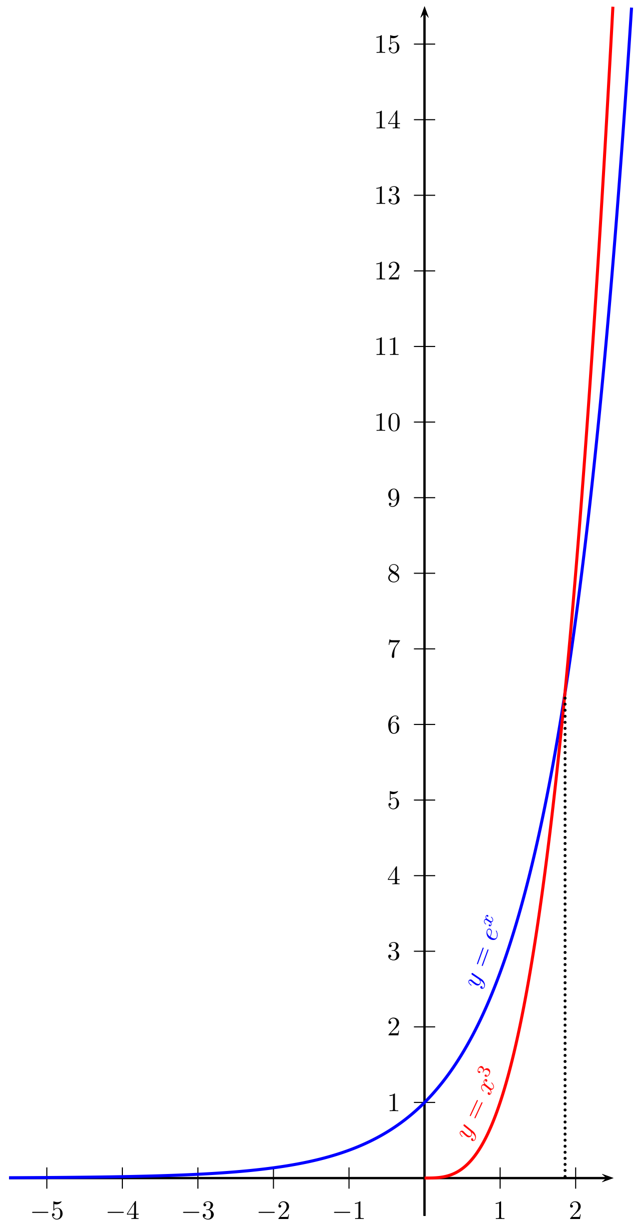
Puisque $e = 2,7\ldots$, si $n = 1$ ou $n = 2$, $f_n(n) < 0$ et si $n \geqslant 3$, $f_n(n) > 0$.

• Si $n = 1$ ou $n = 2$, la fonction f_n admet un maximum strictement négatif et en particulier, la fonction f_n ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Dans ce cas, l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $]0,+\infty[$.

Supposons dorénavant $n \geqslant 3$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0,n]$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,n]$ et même $]0,n[$. De même, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]n,+\infty]$. De plus, $f_n(n) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$. La fonction f_n s'annule donc une et une seule fois sur l'intervalle $[n,+\infty[$ et même $]n,+\infty[$. Finalement, la fonction f_n s'annule exactement deux fois dans l'intervalle $]0,+\infty[$ ou encore l'équation (E_1) a exactement deux solutions dans $]0,+\infty[$.

On a montré que les entiers naturels n pour lesquels l'équation (E_1) admet deux solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 3.


$y = x$
$y = x/2$
$y = x/3$
$y = x/4$
$y = \ln(x)$


$y = e^x$
$y = x^3$

