Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

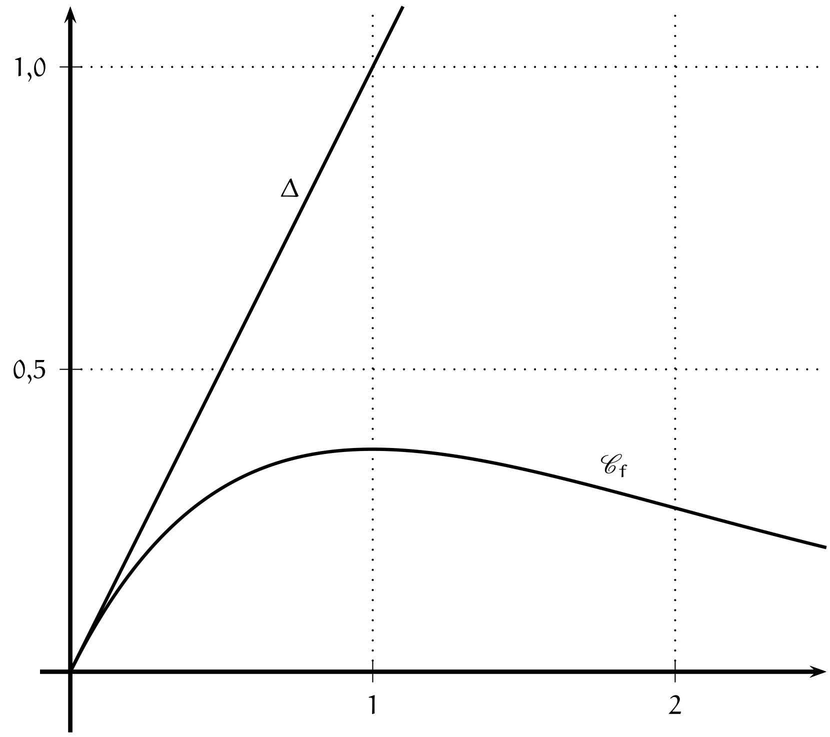
On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}.

Annexe de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur ...... S prend la valeur ......
Traitement :	Pour k variant de 1 à .... u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur ...... Fin Pour Afficher ......

