

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) En posant $X = -x$, on obtient d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -X e^X = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

2) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x ,

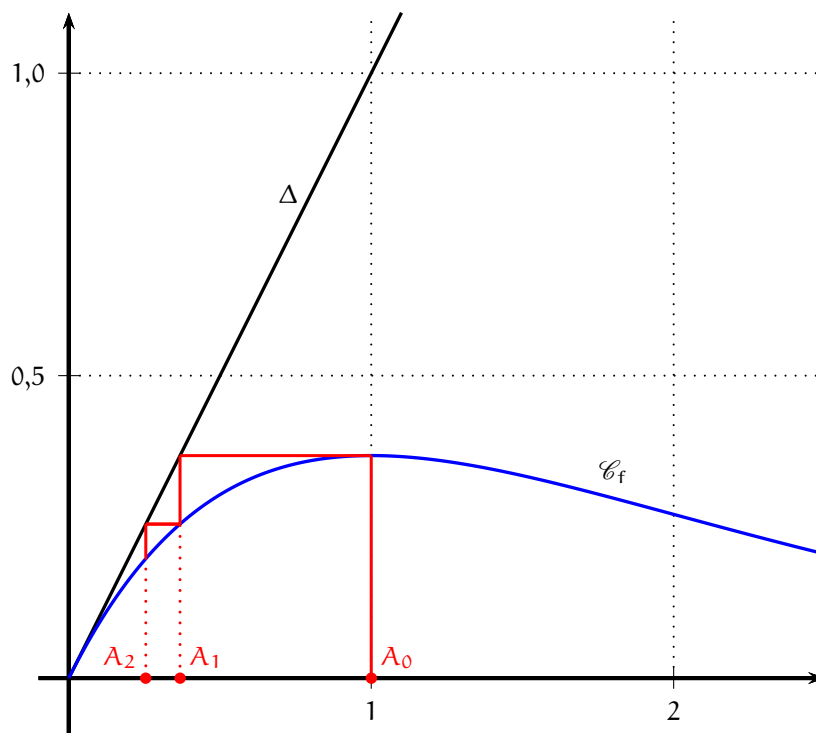
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x , on a $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel positif x , $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f .

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
f	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	

Partie B

1) Représentation graphique de la suite (u_n) .



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
On a $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$. Puisque $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on a donc $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3) Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$. Puisque $u_n > 0$, on a $-u_n < 0$ puis $e^{-u_n} < 1$ et finalement $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$ et donc que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (u_n) est convergente. Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

b) Soit x un réel positif.

$$xe^{-x} = x \Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Puisque pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \geq 0$. Mais alors, d'après le résultat admis par l'énoncé, ℓ est un réel positif ou nul, solution de l'équation $xe^{-x} = x$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Partie C

Algorithme complété.

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur 1 S prend la valeur u
Traitement :	Pour k variant de 1 à 100. u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur $S + u$ Fin Pour Afficher S