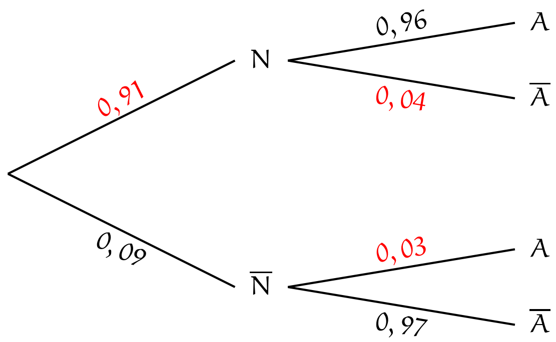
Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = (1 - 0,09) \times 0,96 + 0,09 \times (1 - 0,97)$$
$$= 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763.$$

$$\boxed{P(A) = 0,876\,3.}$$

3) La probabilité demandée est $P_A(N)$.

$$P_A(N) = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{P(N) \times P_N(A)}{P(A)} = \frac{0,91 \times 0,96}{0,8763} = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_A(N) = 0,996\,9 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie B

1) L'égalité $P(D \leqslant 0,4) = 0,5$ signifie que l'on a une chance sur deux que la durée de vie d'une peluche soit inférieure ou égale à 4 ans.

On sait que pour tout réel positif t,

$$P(D \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$P(D \leqslant 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.}$$

La calculatrice fournit $\lambda = 0,173\,28\ldots$

2) La probabilité demandée est $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5)$.

$$P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 8) = \frac{P((X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 8))}{P(X \geqslant 3)} = \frac{P(X \geqslant 8)}{P(X \geqslant 3)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-8\lambda}\right)}{1 - \left(1 - e^{-3\lambda}\right)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}$$
$$= e^{-8\lambda + 3\lambda} = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,1733} = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 8) = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie C

1) On sait que X suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) $J \leqslant 385 \Leftrightarrow J - 358 \leqslant 27 \Leftrightarrow \dfrac{J-358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$. La calculatrice fournit

$$P(J \leqslant 385) = 0,975 \Leftrightarrow P\left(X \leqslant \frac{27}{\sigma}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{27}{\sigma} = 1,9599\ldots \Leftrightarrow \sigma = 13,7\ldots$$

Donc

$$\boxed{\sigma = 14 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}}$$

