Rochambeau 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 2\,200$.

2)

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1 100,00	1 100,00
3	1	=B2-0,1*B2+0,15*C2-0,5	=C2-0,15*C2+0,1*B2+0,5
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3) Il semble que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite $1\,300$ et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite 900.

Partie B

1)

$$\begin{aligned}MS + R &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\times 1\,300 + 0,15\times 900 - 5 \\ 0,1\times 1\,300 + 0,85\times 900 + 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix} = S.\end{aligned}$$

Soit n un entier naturel.

$$X_{n+1} - S = (MX_n + R) - (MS + R) = MX_n - MS = M(X_n - S).$$

2) Soit n un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
X_n &= S + M^n(X_0 - S)\\
&= \begin{pmatrix} 1\,300\\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\ 0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1\,100\\ 1\,100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\,300\\ 900 \end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix} 1\,300\\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\ 0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -200\\ 200 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1\,300-200\,(0,6+0,4\times 0,75^n)+200\,(0,6-0,6\times 0,75^n)\\ 900-200\,(0,4-0,4\times 0,75^n)+200\,(0,4+0,6\times 0,75^n) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1\,300-200\,(0,4+0,6)\,0,75^n\\ 900+200\,(0,4+0,6)\,0,75^n \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1\,300-200\times 0,75^n\\ 900+200\times 0,75^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3) Puisque $-1 < 0,75 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1\,300 - 200\times 0 = 1\,300$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 900 + 200\times 0 = 900$. Ceci valide les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4) Pour tout entier naturel n, $a_n = 1\,300 - 200\times 0,75^n$ et $b_n = 900 + 200\times 0,75^n$.

Soit n un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
1300 - a_n < 1,5 &\Leftrightarrow 200\times 0,75^n < 1,5 \Leftrightarrow 0,75^n < \frac{1,5}{200} \Leftrightarrow 0,75^n < 0,0075\\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,75^n\right) < \ln(0,0075) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(0,75\right) < \ln(0,0075)\\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0075)}{\ln\left(0,75\right)} \text{ (car } \ln\left(0,75\right) < 0)\\
&\Leftrightarrow n > 17,007\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 18 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}
$$

De même, $b_n - 900 < 1,5 \Leftrightarrow 200\times 0,75^n < 1,5 \Leftrightarrow n \geqslant 18$.

Le processus est stabilisé à partir du 18-ème jour.

