

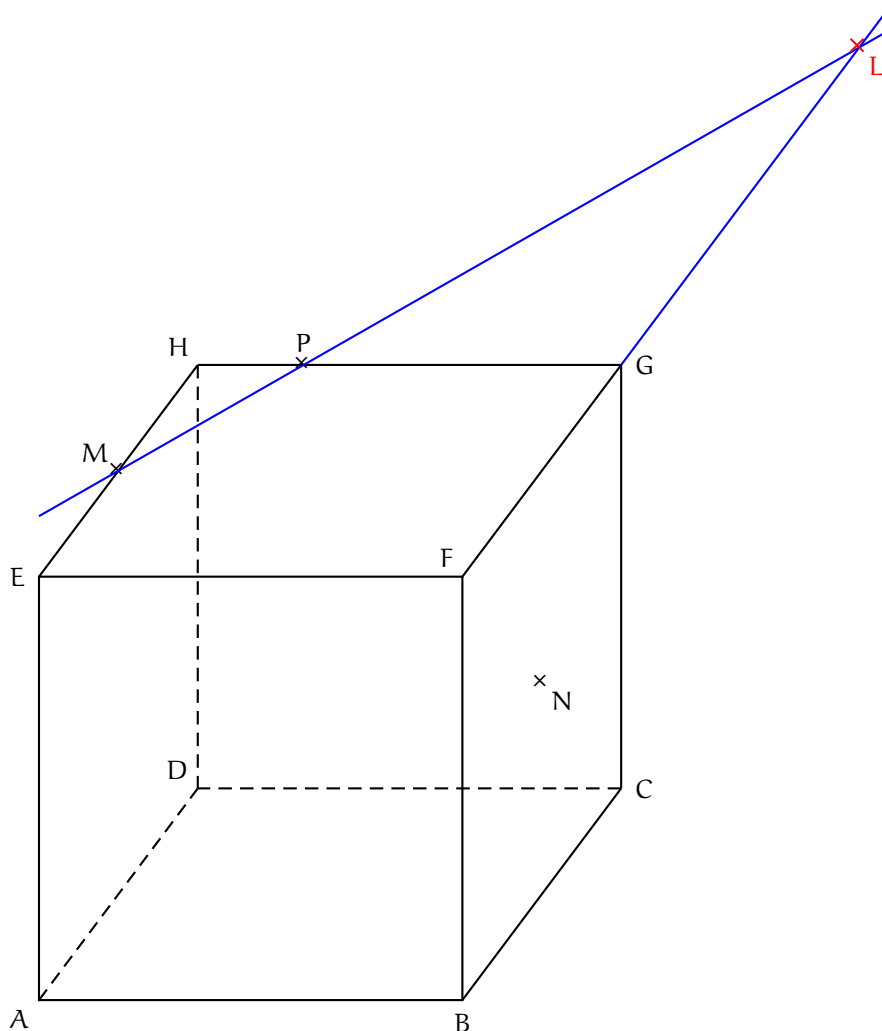
EXERCICE 3 : corrigé

Partie A : section du cube par le plan (MNP)

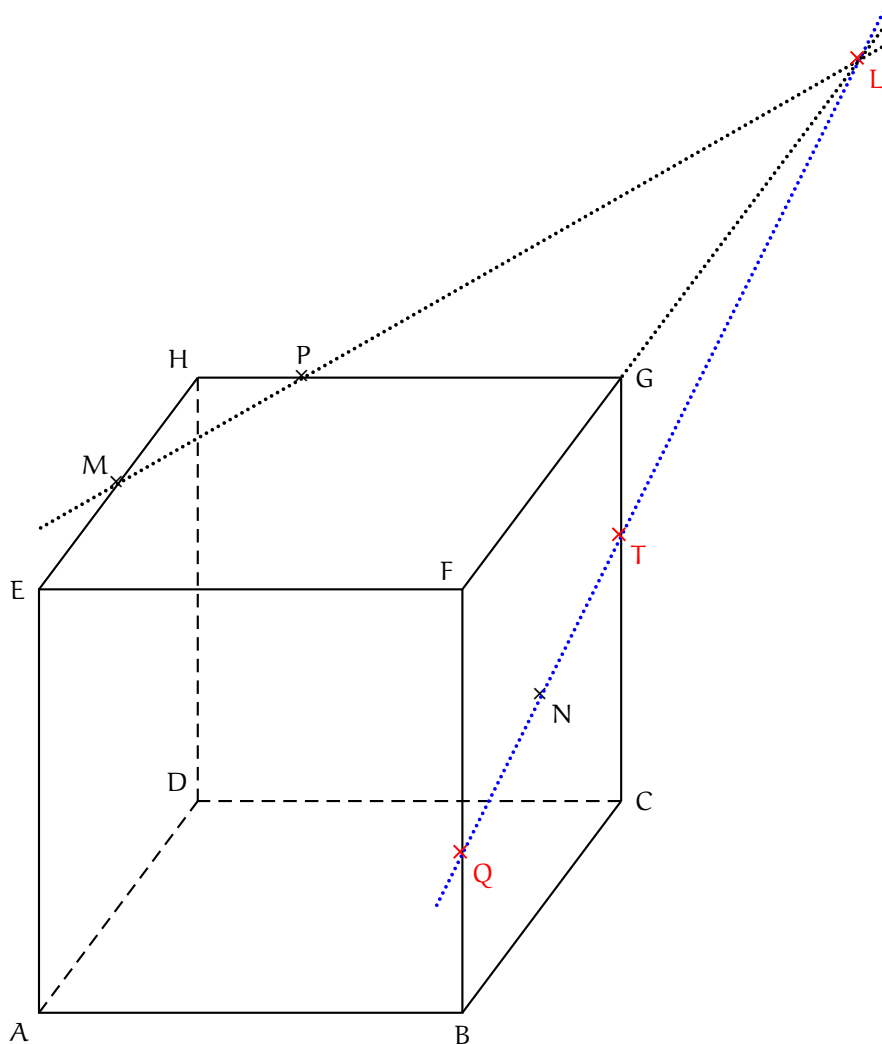
1) Les quatre points M, P, F et G appartiennent au plan (EFG). Donc les droites (MP) et (FG) sont coplanaires.

Supposons par l'absurde (MP) parallèle à (FG). Puisque EFGH est un carré, la parallèle à (FG) passant par M est la droite (EH) et donc (MP) est la droite (EH). Par suite, (MP) coupe la droite (GH) en H mais aussi en P. Ceci impose $H = P$ ce qui est absurde. Donc, les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

Construction.



2) a) **Construction.**

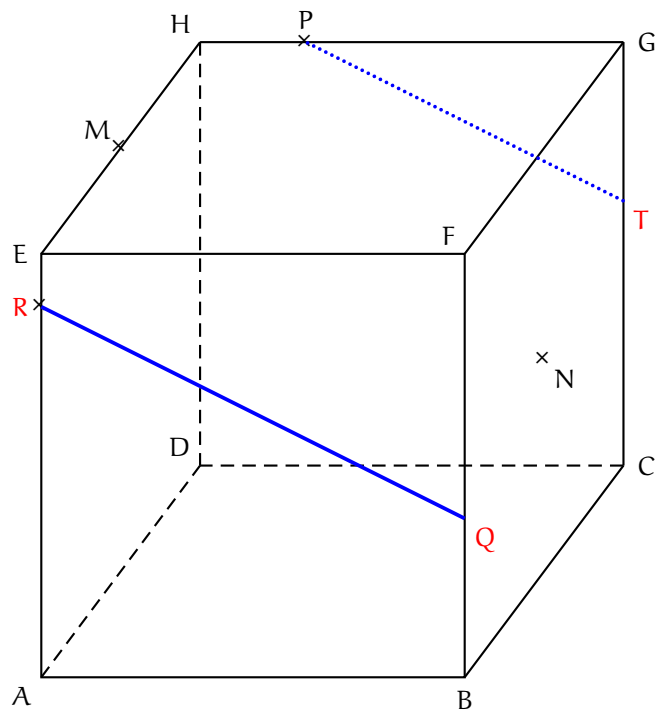


b) Construisons d'abord l'intersection des plans (MNP) et (CDG).

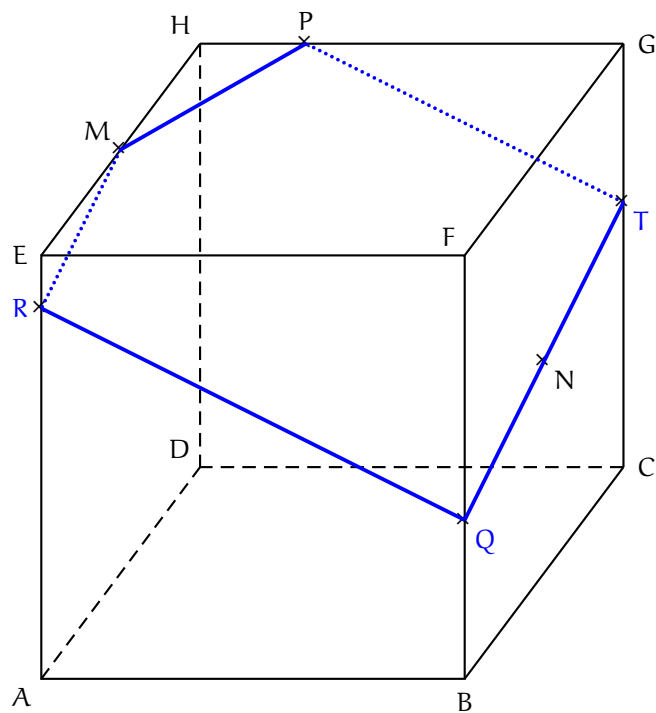
- Le point P est commun aux plans (MNP) et (CDG). Donc les plans (MNP) et (CDG) ne sont pas strictement parallèles. D'autre part, le point M n'est pas dans le plan (CDG) et donc les plans (MNP) et (CDG) ne sont pas confondus. Finalement, les plans (MNP) et (CDG) sont sécants en une droite (Δ).
- Le point P est un point commun aux plans (MNP) et (CDG). Donc le point P est un premier point de (Δ).
- Le point L appartient à la droite (MN) et donc au plan (MNP). Les points L et N sont dans le plan (MNP) et donc la droite (LN) est contenue dans le plan (MNP). Mais alors, le point T est dans le plan (MNP). D'autre part, le point T est dans le plan (CDG) et finalement le point T est un deuxième point de (Δ).
- Ainsi, les plans (MNP) et (CDG) sont sécants en la droite (PT).

Construisons maintenant l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

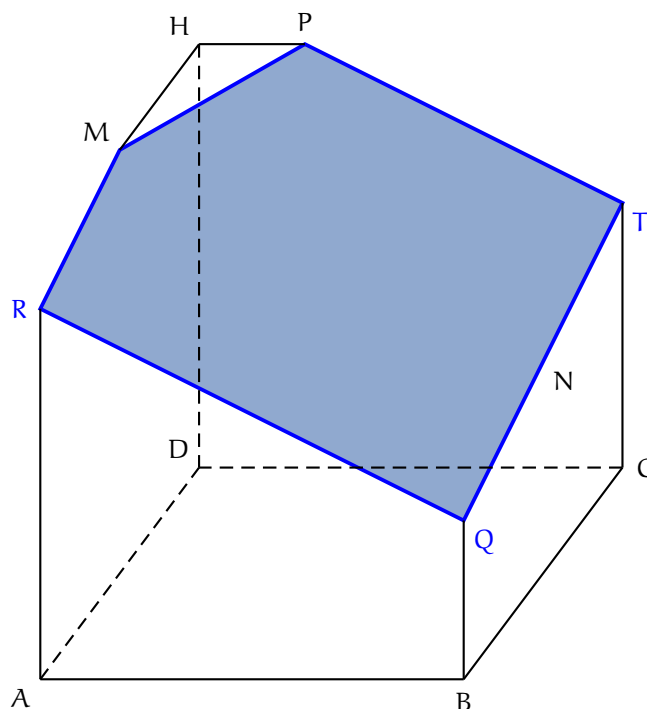
Les plans (CDG) et (ABF) sont parallèles. Le plan (MNP) est donc sécant au plan (ABF) en une droite parallèle à (PT). D'autre part, le point Q appartient à la droite (LN) et donc au plan (MNP). Le point Q est ainsi un point commun aux plans (MNP) et (ABF). Finalement, le plan (MNP) coupe le plan (ABF) en la parallèle à (PT) passant par Q. On en déduit la construction :



3) Le plan (MNP) coupe la face EFH selon le segment [MP], la face CDG selon le segment [PT], la face BCG selon le segment [TQ], la face ABF selon le segment [QR] et donc la face ADH selon le segment [RM].



et si on enlève le haut :



Partie B

1) Le point M a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Le point N a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Le point P a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, 1, 1\right)$.

2) Le point L est dans le plan (EFG) d'équation $z = 1$ et dans le plan (BCF) d'équation $x = 1$. Les coordonnées de L sont de la forme $(1, y, 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{ML}$ a pour coordonnées $\left(1, y - \frac{1}{2}, 0\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires. Ceci impose $\frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/4}$ et donc $y - \frac{1}{2} = 2$ puis $y = \frac{5}{2}$.

Le point L a pour coordonnées $\left(1, \frac{5}{2}, 1\right)$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{NT}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{PT}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{8}\right)$.

$$\overrightarrow{NT} \cdot \overrightarrow{PT} = 0 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{64}.$$

Puisque $\overrightarrow{TN} \cdot \overrightarrow{TP} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{TN}$ et $\overrightarrow{TP}$ ne sont pas orthogonaux ou encore

le triangle TPN n'est pas rectangle en T.