Pondichéry 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p(X_{n+1}) = p(X_n \cap X_{n+1}) + p(Y_n \cap X_{n+1}) + p(Z_n \cap X_{n+1}) \\ &= p(X_n) \times p_{X_n}(X_{n+1}) + p(Y_n) \times p_{Y_n}(X_{n+1}) + p(Z_n) \times p_{Z_n}(X_{n+1}) \\ &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n.}$$

b) Soit n un entier naturel. On a $p(X_n) + p(Y_n) + p(Z_n) = 1$ ou encore $x_n + y_n + z_n = 1$ puis $z_n = 1 - x_n - y_n$. On en déduit que

$$x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1(1 - x_n - y_n) = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1,$$

et

$$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2(1 - x_n - y_n) = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2.$$

2) a) Quand $n = 1$, l'algorithme affiche la valeur de $U_1 = A \times U_0 + B$.

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 \\ 0,2 \times 0,5 + 0,1 \times 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quand $n = 3$, l'algorithme affiche la valeur de U_3.

$$\begin{aligned} U_2 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,42 + 0,4 \times 0,33 \\ 0,2 \times 0,42 + 0,1 \times 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} U_3 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,4 + 0,4 \times 0,317 \\ 0,2 \times 0,4 + 0,1 \times 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quand $n = 1$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}$ et quand $n = 3$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$.

b) La probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est x_3. D'après la question précédente, $x_3 = 0,3868$.

3) a)

$$\begin{aligned} C = A \times C + B &\Rightarrow C - A \times C = A \times C - A \times C + B \Rightarrow I \times C - A \times C = B \Rightarrow (I - A) \times C = B \\ &\Rightarrow N \times C = B. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N \times C = B &\Rightarrow (I - A) \times C = B \Rightarrow C - A \times C = B \Rightarrow C - A \times C + A \times C = A \times C + B \\ &\Rightarrow C = A \times C + B. \end{aligned}$$

Finalement, $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b) $N \times C = B \Rightarrow N^{-1} \times N \times C = N^{-1} \times B \Rightarrow I \times C = N^{-1} \times B \Rightarrow C = N^{-1} \times B$.
Réciproquement, $C = N^{-1} \times B \Rightarrow N \times C = N \times N^{-1} \times B \Rightarrow N \times C = I \times B \Rightarrow N \times C = B$.

Finalement, $C = A \times C + B$ équivaut à $C = N^{-1} \times B$.

b)

$$C = N^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \times 0,1 + \frac{20}{23} \times 0,2 \\ \frac{10}{23} \times 0,1 + \frac{30}{23} \times 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8,5}{23} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = (A \times U_n + B) - (A \times C + B) = A \times U_n - A \times C = A \times (U_n - C) = A \times V_n.$$

b) Les probabilités demandées sont x_4, y_4 et z_4.

$$\begin{aligned} U_4 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,3868 + 0,4 \times 0,3117 \\ 0,2 \times 0,3868 + 0,1 \times 0,3117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x_4 = 0,3794$, $y_4 = 0,30853$ et enfin $z_4 = 1 - x_4 - y_4 = 0,31207$.

$$\boxed{x_4 = 0,3794,\ y_4 = 0,30853 \text{ et } z_4 = 0,31207.}$$

