Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Soit t un réel positif. On sait que

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$P(X \geqslant t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) = 0,15 &\Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0,85) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85). \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85) = 0,08 \text{ arrondi au centième.}}$$

2) a) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = e^{-0,081\times 3} = e^{-0,243}$.

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = e^{-0,243} = 0,78 \text{ arrondi au centième.}}$$

b) Soient t et h deux réels positifs.

$$\begin{aligned} P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P\left((X \geqslant t) \cap (X \geqslant t+h)\right)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P\left(X \geqslant t+h\right)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geqslant h). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels positifs } t \text{ et } h,\ P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h).}$$

c) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 3}\,(X \geqslant 3+2)$. D'après la question précédente

$$P_{X\geqslant 3}\,(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = e^{-0,081\times 2} = e^{-0,162}.$$

$$\boxed{P_{X\geqslant 3}\,(X \geqslant 3+2) = e^{-0,162} = 0,85 \text{ arrondi au centième.}}$$

d) On sait que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.
Ici, $E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35$ arrondi au centième.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35 \text{ arrondi au centième.}}$$

Ceci signifie qu'en moyenne, un moteur a une durée de vie d'environ 12 ans et quatre mois.

3) Ici $n = 800$. D'autre part, on suppose que $p = 0,01$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 792$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation au seuil 95% associé est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}, 0,01 + 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}\right].$$

En arrondissant à 10^{-3} de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,003; 0,017]$.

La fréquence de moteurs défectueux dans l'échantillon est $f = \frac{15}{800} = 0,018\ldots$

f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc le résultat du test remet en question l'annonce de l'entreprise A au risque de se tromper de 5%.

