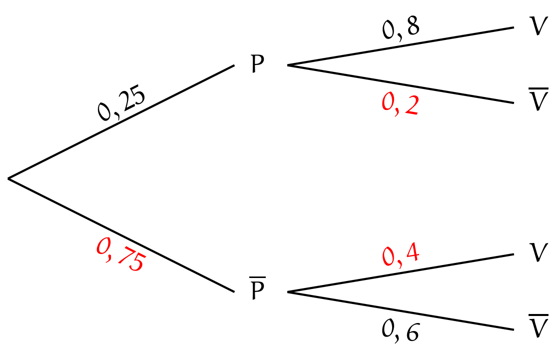
Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**VRAI**
Affirmation 3	**FAUX**
Affirmation 4	**FAUX**
Affirmation 5	**VRAI**

Justification 1. Notons P l'événement « il pleut » et V l'événement « Zoé se rend à son travail en voiture ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(P \cap V) + p\left(\overline{P} \cap V\right) = p(P) \times p_P(V) + p\left(\overline{P}\right) \times p_{\overline{P}}(V) \\ &= 0,25 \times 0,8 + (1 - 0,25) \times (1 - 0,6) = 0,2 + 0,3 = 0,5. \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Supposons que les événements A et B soient indépendants. On a donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(A) = p\,(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$ et donc

$$p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p\,(A \cap B) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right).$$

Par suite, les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants. L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. On sait que pour tout réel t,

$$p(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi $p(T \geqslant t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$. La probabilité demandée est $p(T \geqslant 5)$. La calculatrice fournit

$$p(X \geqslant 5) = e^{-0,7 \times 5} = e^{-3,5} = 0,03\ldots$$

L'affirmation 3 est fausse.

Justification 4. On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$ avec $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,7} = 1,42\ldots$. Donc le temps d'attente moyen est environ $1,4$ minute. L'affirmation 4 est fausse.

Justification 5. Ici $n = 183$ et on suppose que $p = 0,39$. On note que $np = 71,37$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 111,63$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,39 - 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}, 0,39 + 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}\right]$$

En arrondissant demanière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,31;0,47]$.
La fréquence observée est $f = 0,34$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A^+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. L'affirmation 5 est vraie.

