Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(1,0,2)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$ sont $(7,5,-1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(6,5,-3)$.

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 1\times 6 + 0\times 5 + 2\times(-3) = 6-6 = 0.$$

Donc le triangle BCD est rectangle en C. De plus $BC = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ et $CD = \sqrt{6^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{70}$. Puisque $BC \neq CD$, le triangle BCD n'est pas isocèle en C.

Puisque le triangle BCD est rectangle en C, son aire est

$$\frac{BC\times CD}{2} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle } BCD \text{ est égale à } \frac{5\sqrt{14}}{2}.}$$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (dans le cas contraire, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BC}$ et en particulier tel que $0\times k = 5$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible). Donc les points B, C et D définissent un unique plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BC} = (-2)\times 1 + 3\times 0 + 1\times 2 = -2+2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{CD} = (-2)\times 6 + 3\times 5 + 1\times(-3) = -12+15-3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan BCD. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b) Le plan BCD est le plan passant par $B(-1,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2,3,1)$. Une équation cartésienne du plan BCD est donc

$$-2(x-(-1)) + 3(y-1) + (z-0) = 0,$$

ou encore une équation cartésienne du plan BCD est $-2x+3y+z=5$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (BCD) \text{ est } -2x+3y+z=5.}$$

3) La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(5,-5,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(-2,3,1)$. Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5-2t \\ y = -5+3t \\ z = 2+t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

4) Soit $M(5-2t,-5+3t,2+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$M\in(BCD) \Leftrightarrow -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t) = 5 \Leftrightarrow 14t = 28 \Leftrightarrow t = 2.$$

Quand $t=2$, on obtient les coordonnées du point H : $(1,1,4)$.

$$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } (1,1,4).}$$

5) Le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan BCD.

$$AH = \sqrt{(1-5)^2+(1-(-5))^2+(4-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Par suite, le volume du tétraèdre $ABCD$ est

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times AH\times\text{aire de}(BCD) = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{14}\times\frac{5\sqrt{14}}{2} = \frac{1}{3}\times 5\times 14 = \frac{70}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre } ABCD \text{ est égal à } \frac{70}{3}.}$$

6) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-6, 6, -2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-5, 6, 0)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-6) \times (-5) + 6 \times 6 + (-2) \times 0 = 66.$$

Par suite,

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\widehat{BAC} = 14,2^\circ \text{ au dixième de degré près.}}$$

