Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

La dérivée de f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

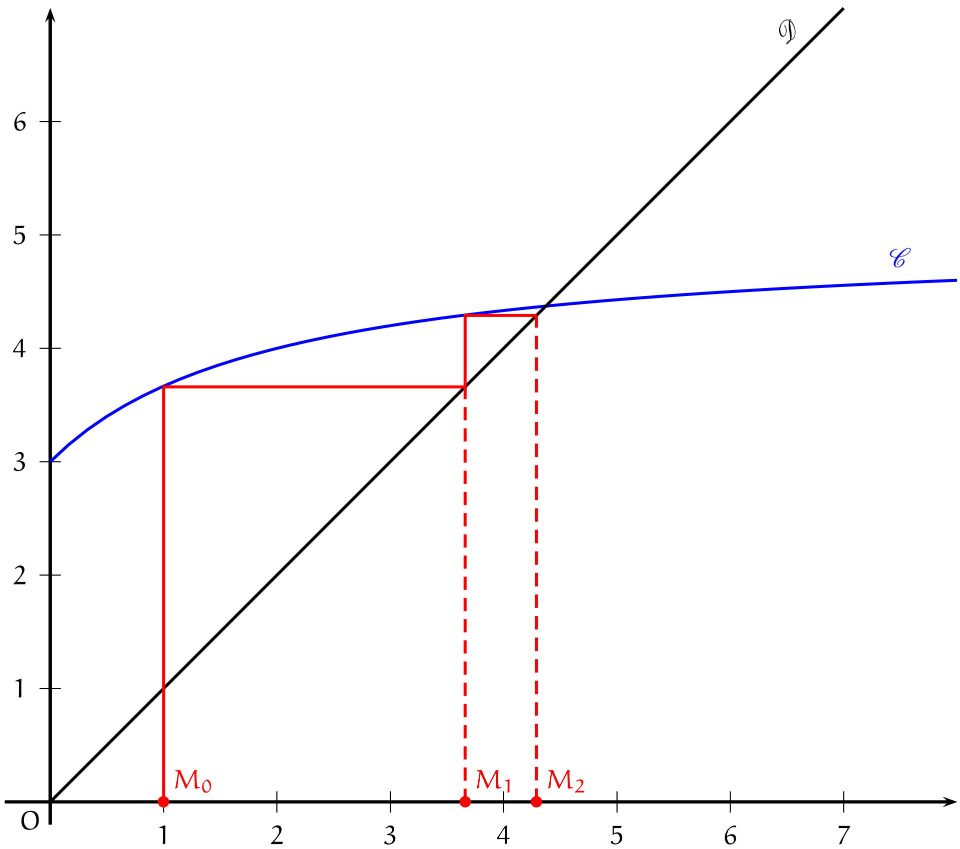
2) Soit x un réel positif.

$$f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow \frac{5(x+2)-4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5x+6 = x^2+2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2-3x-6=0$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 33$. L'équation $x^2-3x-6=0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $x_1 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$. x_1 est un réel positif et x_2 est un réel strictement négatif. Donc l'équation $x^2-3x-6=0$ admet une et une seule solution positive à savoir le réel $\alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$. La calculatrice fournit

$$\boxed{\alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2} = 4,37 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

3) Représentation graphique.



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, convergente de limite α.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 \geqslant 0$. $u_1 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} = 3,6\ldots$ Donc $u_1 \geqslant u_0$. Enfin, $\alpha = 4,3\ldots$ et donc $\alpha \geqslant u_1$. Ainsi, $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha &\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \text{ (par croissance de la fonction } f \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &\Rightarrow 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha\\ &\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par le réel α. Donc la suite (u_n) est convergente.

5) a) $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3} = 4,66$ à 10^{-2} près.

$u_2 = 5 - \dfrac{4}{\dfrac{11}{3}+2} = 5 - \dfrac{12}{17} = \dfrac{73}{17}$ puis $S_2 = \dfrac{14}{3} + \dfrac{73}{17} = \dfrac{457}{51} = 8,96$ à 10^{-2} près.

b)Algorithme complété.

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement	Tant que $i < n$ Affecter à i la valeur $i+1$ Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$ Affecter à s la valeur $s + u$ Fin tant que
Sortie	Afficher s

c) La suite (u_n) est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0$ ou encore $u_n \geqslant 1$. Par suite, pour tout entier naturel n,

$$S_n \geqslant \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1 \text{ termes}} = n+1.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

