

**EXERCICE 3 : corrigé**

1) a) Les coordonnées du point  $I$  sont  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$  ou encore  $(1, 1, 1)$ .

De même, les coordonnées de  $J$  sont  $(3, 3, -1)$ .

Notons  $(x, y, z)$  les coordonnées du point  $K$ .

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{3}(-5 - 1) \\ y - 2 = \frac{1}{3}(5 - 2) \\ z - 3 = \frac{1}{3}(0 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{I(1, 1, 1), J(3, 3, -1) \text{ et } K(-1, 3, 2).}$$

b) Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{IJ}$  sont  $(2, 2, -2)$  et les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{IK}$  sont  $(-2, 2, 1)$ .

S'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{IK} = \lambda\overrightarrow{IJ}$ , alors  $-2 = 2\lambda$  (en analysant la première coordonnée) et donc  $\lambda = -1$  et aussi  $2 = 2\lambda$  (en analysant la deuxième coordonnée) et donc  $\lambda = 1$ . Ceci est impossible et donc les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  ne sont pas colinéaires ou encore les points  $I, J$  et  $K$  ne sont pas alignés.

On a montré que les points  $I, J$  et  $K$  définissent un plan.

c)

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 3 \times 2 + 1 \times 2 + 4 \times (-2) = (3 + 1 - 4) \times 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 3 \times (-2) + 1 \times 2 + 4 \times 1 = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(IJK)$  et donc le vecteur  $\overrightarrow{n}$  est un vecteur normal au plan  $(IJK)$ .

Le plan  $(IJK)$  est le plan passant par  $I(1, 1, 1)$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{n}(3, 1, 4)$ . Une équation cartésienne du plan  $(IJK)$  est donc  $3(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0$  ou encore  $3x + y + 4z - 8 = 0$ .

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (IJK) \text{ est } 3x + y + 4z - 8 = 0.}$$

2) a) La droite  $(BD)$  est la droite passant par  $B(1, 2, 3)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{BD}(10, -1, -5)$ . Une représentation paramétrique de la droite  $(BD)$  est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 10t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit  $M(1 + 10t, 2 - t, 3 - 5t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de la droite  $(BD)$ .

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3(1 + 10t) + (2 - t) + 4(3 - 5t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand  $t = -1$ , on obtient les coordonnées du point  $L : (-9, 3, 8)$ .

$$\boxed{\text{Le point } L \text{ a pour coordonnées } (-9, 3, 8).}$$

c) Les coordonnées du segment  $[LD]$  sont  $\left(\frac{-9 + 11}{2}, \frac{3 + 1}{2}, \frac{8 - 2}{2}\right)$  ou encore  $(1, 2, 3)$ . Par suite, le milieu du segment  $[LD]$  est le point  $B$  ou encore le point  $L$  est le symétrique du point  $D$  par rapport au point  $B$ .