

EXERCICE 2 : corrigé

Affirmation 1	VRAI
Affirmation 2	FAUX
Affirmation 3	VRAI
Affirmation 4	VRAI
Affirmation 5	FAUX

Justification 1.

1ère solution. $|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\right)^{10} \times \left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^{10} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^5 \times e^{\frac{3i\pi \times 10}{4}} = 2^5 e^{\frac{15i\pi}{2}} \\ &= 32e^{\frac{16i\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}} = 32e^{8i\pi - i\frac{\pi}{2}} = 32e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= -32i. \end{aligned}$$

En particulier, le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire. L'affirmation 1 est vraie.

2ème solution. $(-1 + i)^2 = (-1)^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ puis

$$(-1 + i)^{10} = ((-1 + i)^2)^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 i^5 = -32 \times i^2 \times i^2 \times i = -32i.$$

2) Justification 2. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z - \bar{z} + 2 - 4i = (x + iy) - (x - iy) + 2 - 4i = 2iy + 2 - 4i = 2 + i(2y - 4).$$

En particulier, la partie réelle de $z - \bar{z} + 2 - 4i$ est égale à 2. Cette partie réelle n'est pas nulle. Mais alors, $z - \bar{z} + 2 - 4i$ n'est jamais nul ou encore l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$. L'affirmation 2 est fausse.

3) Justification 3.

$$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{1}{2} \ln(e^7) + \frac{9}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

et

$$\frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln(3/4)}} = \frac{6}{3/4} = \frac{24}{3} = 8.$$

Donc l'affirmation 3 est vraie.

4) Justification 4.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2} dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} dx = [\ln(e^x + 2)]_0^{\ln 3} = \ln(e^{\ln 3} + 2) - \ln(e^0 + 2) \\ &= \ln(3 + 2) - \ln(1 + 2) = \ln(5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Donc l'affirmation 4 est vraie.

5) Justification 5.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \ln(x - 1) - \ln(x + 2) = \ln 4 &\Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 2) \Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln(4(x + 2)) \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 4(x + 2) \text{ et } x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow -3x = 9 \text{ et } x > 1 \Leftrightarrow x = -3 \text{ et } x > 1. \end{aligned}$$

Puisque $-3 \leq 1$, l'équation proposée n'a pas de solution. Donc l'affirmation 5 est fausse.