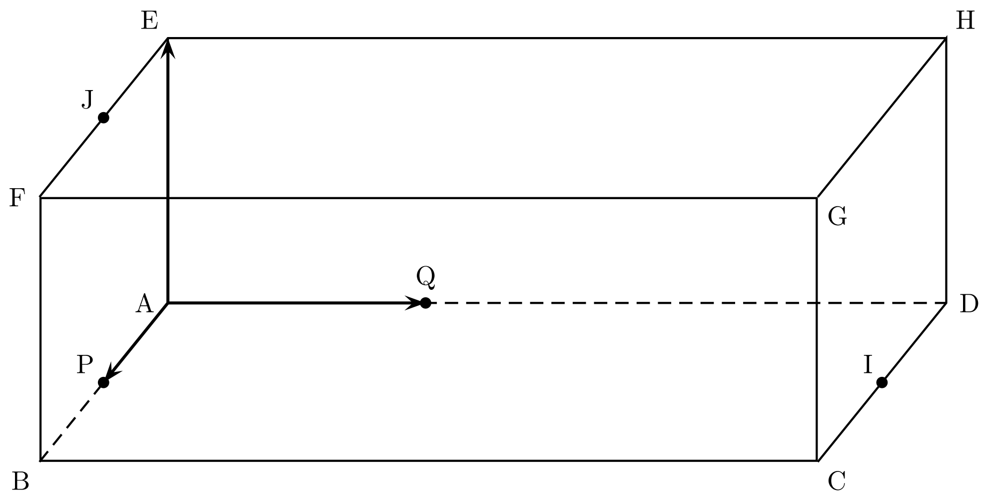
Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$.
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment $[AB]$.

3) Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment $[IJ]$.

4) a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

c) Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

d) Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABIJ$.

