

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Les trois points A, B et J ne sont pas alignés. Ils définissent donc un unique plan, le plan (ABJ) qui est aussi le plan (ABE). Le point I n'est pas dans ce plan et donc les points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2) Le plan (P_1) est le plan passant par le point P et de vecteur normal $\overrightarrow{AP}$.

Le point P a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Donc une équation du plan (P_1) est $1 \times (x - 1) + 0 \times (y - 0) + 0 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x = 1$.

Une équation cartésienne du plan (P_1) est $x = 1$.

3) Le point I a pour coordonnées $(1, 3, 0)$ et le point J a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le milieu K du segment [IJ] a donc pour coordonnées $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $(0, 3, -1)$.

Le plan (P_2) est le plan passant par K et de vecteur normal $\overrightarrow{JK}$.

Une équation cartésienne de (P_2) est donc $0 \times (x - 1) + 3 \times \left(y - \frac{3}{2}\right) - 1 \times \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$ ou encore $3y - z - 4 = 0$.

4) a) Un vecteur normal au plan (P_1) est le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1, 0, 0)$ et un vecteur normal au plan (P_2) est le vecteur $\overrightarrow{n_2}(0, 3, -1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P_1) et (P_2) sont sécants en une droite.

b) Soit $M(1, t, 3t - 4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ . D'une part, $x_M = 1$ et donc M appartient au plan (P_1) . D'autre part,

$$3y_M - z_M - 4 = 3t - (3t - 4) - 4 = 0,$$

et donc M appartient au plan (P_2) .

En résumé, tout point de Δ appartient aux plans (P_1) et (P_2) et donc, la droite (Δ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \text{ est la droite d'intersection des plans } (P_1) \text{ et } (P_2).$$

c) Soit $M(1, t, 3t - 4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$\begin{aligned} MA = MI &\Leftrightarrow AM^2 = IM^2 \\ &\Leftrightarrow (1)^2 + (t)^2 + (3t - 4)^2 = (1 - 1)^2 + (t - 3)^2 + (3t - 4 - 0)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + t^2 = t^2 - 6t + 9 \\ &\Leftrightarrow 6t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Quand $t = \frac{4}{3}$, on obtient le point Ω de coordonnées $\left(1, \frac{4}{3}, 0\right)$.

Les coordonnées de Ω sont $\left(1, \frac{4}{3}, 0\right)$.

d) On a $\Omega I = \Omega A = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{5}{3}$. Ensuite, $\Omega B = \sqrt{(1 - 2)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{5}{3}$.

Enfin, $\Omega J = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \frac{5}{3}$.

En résumé, $\Omega A = \Omega B = \Omega I = \Omega J = \frac{5}{3}$ et donc le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.