Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Limite de f en 0. En posant $x = \dfrac{1}{X}$, on obtient

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

d'après un théorème de croissances comparées.

Limite de f en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0,\ x>0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \ln(x) + 1.}$$

3) Soit x un réel strictement positif.

$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
De même, $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\left]e^{-1},+\infty\right[$, strictement négative sur $\left]0,e^{-1}\right[$ et s'annule en e^{-1}. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1) a) $U = \dfrac{1}{4}f(1)+\dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{2}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{3}{4}\right)$ et $V = \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{2}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f(2)$.

U est la somme des aires des rectangles au-dessous de la courbe et V est la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

b) • $U = \dfrac{1}{4}\left(1,25\ln(1,25) + 1,5\ln(1,5) + 1,75\ln(1,75)\right) = 0,466\,6$ à 10^{-4} près par défaut.

• $V = \dfrac{1}{4}\left(1,25\ln(1,25) + 1,5\ln(1,5) + 1,75\ln(1,75) + 2\ln(2)\right) = 0,813\,2$ à 10^{-4} près par excès.

c) On en déduit que $0,466\,6 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0,813\,2$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$V_n - U_n = \frac{f(2) - f(1)}{n} = \frac{2\ln(2)}{n},$$

puis

$$\begin{aligned} V_n - U_n < 0,1 &\Leftrightarrow \frac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \Leftrightarrow n > 20\ln(2) \Leftrightarrow n > 13,8\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)} \end{aligned}$$

b) Algorithme modifié.

Variables

k et n sont des entiers naturels

U, V sont des nombres réels

Initialisation

U prend la valeur 0

V prend la valeur 0

n prend la valeur 14

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

Affecter à U la valeur $U + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$

Affecter à V la valeur $V + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher $U \leqslant \mathcal{A} \leqslant V$

Partie C

1) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2} = x\ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln(x) = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) La fonction f est continue et positive sur $[1, 2]$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 f(x)\, dx = [F(x)]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{1^2}{4}\right)\\ &= 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln(2) - \frac{3}{4} = 0,6362\ldots}$$

