Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt.$$

1) Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2) Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

4) En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5) Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

- A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;
- B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;
- D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1) La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2) Montrer que $p(B \cap D) = 0,022\,4$.

3) Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,042\,4$.

1) Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	$0,000\,00$	$0,000\,04$	$0,001\,65$	$0,025\,06$	$0,163\,68$

Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	$0,836\,32$	$0,974\,94$	$0,998\,35$	$0,999\,96$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2) On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

- **a)** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?
- **b)** Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
- **c)** Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

