Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

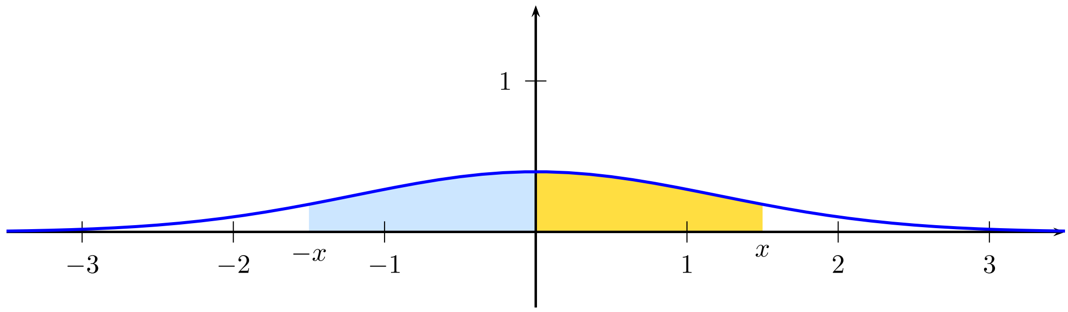
Partie A

Restitution organisée des connaissances

1) La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite.

2) $H(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3) Soit x un réel positif. Puisque la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine jaune ci-dessous et $\displaystyle\int_{-x}^0 f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine bleu ci-dessous.



La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc ces deux aires sont égales. Comme $H(x)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la réunion des deux domaines, on en déduit que $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

4) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que sa dérivée est f. On en déduit que pour tout réel positif x, $H'(x) = 2f(x)$.

La fonction f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction H.

x	0	$+\infty$
$H'(x)$	$+$	
H	$0 \nearrow$	1

5) Soit α un réel élément de $]0, 1[$. Alors $1 - \alpha$ est un réel élément de $]0, 1[$.

La fonction H est continue continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to0} H(x), \lim\limits_{x\to+\infty} H(x)\right[=]0, 1[$, l'équation $H(x) = k$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. Puisque le réel $1 - \alpha$ appartient à $]0, 1[$, on a montré qu'il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $H(\chi_\alpha) = 1 - \alpha$ ou encore tel que $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha) = 1 - \alpha$.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(A) = 0,6$, $p_A(D) = 0,046$ et $p(D) = 0,05$. La probabilité demandée est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \times p_A(D)}{p(D)} = \frac{0,6 \times 0,046}{0,05} = 0,552.$$

$$\boxed{p_D(A) = 0,552.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$$

et donc

$$p(B \cap D) = p(D) - p(A \cap D) = p(D) - p(A) \times p_A(D) = 0,05 - 0,6 \times 0,046 = 0,022\,4.$$

$$\boxed{p(B \cap D) = 0,022\,4.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(D)$. Or

$$p_B(D) = \frac{p(B \cap D)}{p(B)} = \frac{p(B \cap D)}{1 - p(A)} = \frac{0,022\,4}{0,4} = 0,056$$

ou encore

$$\boxed{5,6\% \text{ des pipettes de l'entreprise } B \text{ présentent un défaut.}}$$

Partie C

1) La probabilité demandée est $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$. Or,

$$P(98 \leqslant X \leqslant 102) = P(X \leqslant 102) - P(X \leqslant 98) = 0,974\,94 - 0,025\,06 = 0,949\,88.$$

Donc

$$\boxed{\text{La probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme est } 0,949\,8 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

2) a) Y_n suit une loi binomiale. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (prélever une pipette n fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la pipette est non conforme » avec une probabilité $p = 0,05$ et « la pipette est conforme » avec une probabilité $1 - p = 0,95$.

Donc, Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,05$.

b) L'énoncé dit que $n \geqslant 100$ et en particulier $n \geqslant 30$. Ensuite, $np \geqslant 100 \times 0,05 = 5$ et $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 = 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

c) Les conditions b) étant vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{n}}, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{n}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on peut prendre comme intervalle

$$\left[0,05 - \frac{0,428}{\sqrt{n}}, 0,05 + \frac{0,428}{\sqrt{n}}\right].$$

