Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explications
1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Ensuite,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

2) Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}|z-1+i| = \left|\sqrt{3}-i\right| &\Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2 = \left|\sqrt{3}-i\right|^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 4.\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse c).

3) Pour tout entier naturel n,

$$|Z_{n+1}| = \frac{|1+i|}{2}|Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|Z_n|.$$

La suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à 0.

Donc, la bonne réponse est la réponse c).

On peut noter que $|Z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $|Z_1| \neq \sqrt{2} = |Z_0|$ et aussi $OM_1 \neq OM_1$. Donc les réponses a) et b) sont effectivement fausses.
D'autre part, $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n} = \frac{1+i}{2} - 1 = \frac{-1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $-\frac{\pi}{4}$. La réponse d) est effectivement fausse.

4)

$$Z = \frac{(1+5i)-(-1-i)}{(2-2i)-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{2i(3-i)}{3-i} = 2i.$$

Donc Z n'est pas réel et la réponse a) est fausse. D'autre part,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = |2i| = 2,$$

et donc $AC \neq AB$. La réponse b) est fausse.

Ensuite,

$$MB = |Z_B - Z| = |2-2i-2i| = |2-4i| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$$

et

$$\mathrm{MC} = |Z_C - Z| = |1 + 5i - 2i| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Donc, $\mathrm{MB} \neq \mathrm{MC}$ et la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions le.

$Z_{\overrightarrow{AB}} = 3 - i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3, -1)$.
$Z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 6i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(2, 6)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 0.$$

La proposition c) est effectivement vraie.

