Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Proposition 1	**VRAI**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**
Proposition 5	**VRAI**

Justification 1 Notons Δ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

$t = 2$ fournit le point A et $t = 1$ fournit le point B. Donc les points A et B appartiennent à la droite Δ ou encore Δ est la droite (AB). Donc la proposition 1 est vraie.

Justification 2 Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(2,1,3)$ et un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{u'}(-2,1,1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 3 \times 1 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 Puisque $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales, $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles et sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

Soient $M(2t, 1+t, -5+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$ et $N(5-2u, -1+u, -2+u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t = 5-2u \\ 1+t = -1+u \\ -5+3t = -2+u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t+2 \\ 2t = 5-2(t+2) \\ -5+3t = -2+(t+2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t+2 \\ 4t = 1 \\ 2t = 5 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}$ et (AB) n'ont aucun point commun. Par suite, les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas coplanaires. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 Soit $M(2t, 1+t, -5+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (2t) - (1+t) + 3(-5+3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 10t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Ceci montre déjà que la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point. Pour $t = \dfrac{3}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(3; \dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$. Donc, la proposition 4 est fausse.

Justification 5 Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,-1,3)$. Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2,-1,-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(6,0,-2)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + (-1) \times 0 + 3 \times (-2) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) puis les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. La proposition 5 est vraie.

