# France métropolitaine 2014. Enseignement de spécialité

**EXERCICE 4 : corrigé**

**1)** L'année 0, le bassin A contient 200 poissons et le bassin B contient 100 poissons ou encore $a_0 = 200$ et $b_0 = 100$.
L'année 1, le bassin B est vidé puis les 200 poissons du bassin A passent dans le bassin B et on rajoute 100 poissons dans le bassin B. Donc, $b_1 = 200 + 100 = 300$.
D'autre part, la vente des 100 poissons du bassin B permet l'achat de 200 poissons que l'on met dans le bassin A auxquels on ajoute encore 200 poissons. Donc $a_1 = 200 + 200 = 400$.

De même, $a_2 = 2b_1 + 200 = 800$ et $b_2 = a_1 + 100 = 500$.

$$\boxed{a_1 = 400,\ b_1 = 300,\ a_2 = 800 \text{ et } b_2 = 500.}$$

**2)a)** Soit $n$ un entier naturel. Le nombre de poissons du bassin A l'année $n+1$ est le double du nombre de poissons du bassin B l'année $n$ augmenté de 200. Donc, $a_{n+1} = 2b_n + 200$.
De même, le nombre de poissons du bassin B l'année $n+1$ est le nombre de poissons du bassin A l'année $n$ augmenté de 100. Donc, $b_{n+1} = a_n + 100$. Par suite,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= AX_n + B. \end{aligned}$$

**b)** Soient $x$ et $y$ deux réels.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = x + 100 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = (2y + 200) + 100 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -300 \\ x = -400 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

**c)** Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $x = -400$ et $y = -300$. Soit $n$ un entier naturel.

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - X = (AX_n + B) - (AX + B) = A(X_n - X) = AY_n.$$

**3) a)** Soit $n$ un entier naturel.

$$Z_{n+1} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times A \times Y_{2n} = A^2 Z_n.$$

Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et donc

$$Z_{n+1} = A^2 Z_n = 2I_2 Z_n = 2Z_n.$$

**b)** Soit $n$ un entier naturel. Puisque $Y_{2n} = 2^n Z_0$ avec $Z_0 = Y_0$,

$$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^n Z_0 = 2^n AY_0 = 2^n Y_1.$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = Y_{2n} = 2^n Y_0 = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $a_{2n} + 400 = 600 \times 2^n$ puis $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$. On a aussi

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_1 + 400 \\ b_1 + 400 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \end{pmatrix}$$

et donc $a_{2n+1} + 400 = 800 \times 2^n$ puis $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \text{ et } a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.}$$

 

**4) a)** Si $p = 2n$, alors $p$ est pair et $n = \dfrac{p}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $600 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n} = a_p$.
Si $p = 2n + 1$, alors $p$ est impair et $n = \dfrac{p-1}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $800 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n+1} = a_p$.

Dans tous les cas, l'algorithme affiche $a_p$ une fois qu'on a rentré une valeur de $p$.

**b) Algorithme modifié.**

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $a, p$ et $n$ sont des entiers naturels. |
| **Initialisation :** | Affecter à $p$ la valeur 0.<br>Affecter à $a$ la valeur 200. |
| **Traitement :** | Tant que $a \leqslant 10000$ faire<br>    Affecter à $p$ la valeur $p + 1$.<br>    Si $p$ est pair<br>        Affecter à $n$ la valeur $\dfrac{p}{2}$<br>        Affecter à $a$ la valeur $600 \times 2^n - 400$.<br>    Sinon<br>        Affecter à $n$ la valeur $\dfrac{p-1}{2}$<br>        Affecter à $a$ la valeur $800 \times 2^n - 400$.<br>    Fin de Si.<br>Fin de Tant que |
| **Sortie :** | Afficher $p$. |

 