France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -3 \times 16 < 0$.

L'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir

$$Z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{3 \times 16}}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 - 2i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } Z^2 + 4Z + 16 = 0 \text{ sont } Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} - 2 - 2i\sqrt{3}.}$$

$|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et $Z_2 = \overline{Z_1} = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{Z_1 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } Z_2 = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

2) $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ puis

$$a^2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Soit alors z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} &\Leftrightarrow z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ sont } a = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } -a = -1 - i\sqrt{3}.}$$

3) Restitution organisée de connaissances

a) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Posons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont quatre réels.

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overline{z_1z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Par suite, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

b) Soit z un nombre complexe z. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

- $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ et montrons que $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \overline{z \times z^n} \\ &= \overline{z} \times \overline{z^n} \text{ (d'après a))} \\ &= \overline{z} \times (\overline{z})^n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \Rightarrow \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} \\ &\Rightarrow \overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \overline{z} \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$

Maintenant (a ayant été défini à la question 2)), $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ puis $a^2 = 2^2 e^{2\times\frac{i\pi}{3}} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} = Z_1$ (où Z_1 a été défini à la question 1)). Par suite,

$$a^4 + 4a^2 + 16 = \left(a^2\right)^2 + 4a^2 + 16 = (Z_1)^2 + 4Z_1 + 16 = 0.$$

Ainsi, a est solution de l'équation (E). $-a$ est aussi solution car $(-a)^4 + 4(-a)^2 + 16 = a^4 + 4a^2 + 16 = 0$. D'après le début de la question 4), $\overline{a}$ et $\overline{-a} = -\overline{a}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

En résumé, les quatres nombres $1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation (E). Or, ces quatre nombres sont deux à deux distincts et, d'après le résultat admis par l'énoncé, l'équation (E) admet au plus quatre solutions. Donc,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } \left\{1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\right\}.}$$

