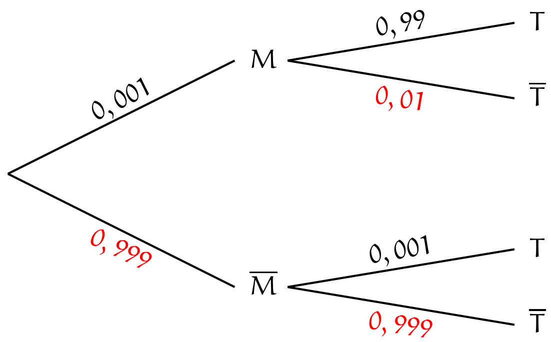
France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) \\
&= 0,001 \times 0,99 + (1 - 0,001) \times 0,001 = 0,00099 + 0,000999 \\
&= 0,001989 = 1,989 \times 10^{-3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 1,989 \times 10^{-3}.}$$

c) L'affirmation de l'énoncé s'écrit encore $p_T(M) < 0,5$. Or

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{0,001989} = 0,497\ldots.$$

Donc $p_T(M) < 0,5$ et l'affirmation de l'énoncé est vraie.

2) La proportion de personnes malades n'est plus $0,1$ % mais x. Puisque $p(M) = x$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,99x + 0,001(1 - x) = 0,989x + 0,001.$$

On en déduit que

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,99x}{0,989x + 0,001}.$$

On veut que $p_T(M) \geqslant 0,95$.

$$\begin{aligned}
p_T(M) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \frac{0,99x}{0,989x + 0,001} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,99x \geqslant 0,95(0,989x + 0,001) \Leftrightarrow 0,99x \geqslant 0,93955x + 0,00095 \\
&\Leftrightarrow 0,05045x \geqslant 0,00095 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \\
&\Leftrightarrow x \geqslant 0,0188\ldots
\end{aligned}$$

En arrondissant à 10^{-3}, le laboratoire commercialise le test quand la proportion de personnes malades dépasse $1,9$ %.

Partie B

1) a) La probabilité demandée est $p(890 \leqslant X \leqslant 920)$. La calculatrice fournit $p(890 \leqslant X \leqslant 920) = 0,92$ arrondi à 10^{-2}.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un comprimé soit conforme est } 0,92 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) Pour des raisons de symétrie, $p(X \leqslant 900 - h) = p(X \geqslant 900 + h)$. Donc,

$$p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 1 - p(X \leqslant 900 - h) - p(X \geqslant 900 + h) = 1 - 2p(X \leqslant 900 - h),$$

puis $p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 0,99$ à 10^{-3} près équivaut à $1 - 2p(X \leqslant 900 - h) = 0,99$ à 10^{-3} près ce qui fournit encore $p(X \leqslant 900 - h) \approx 0,005$.

La calculatrice donne $900 - h = 881,969\dots$ et donc $h = 18,03\dots$ ou encore $h \approx 18$.

2) Ici, on suppose que $p = 0,97$. D'autre part, $n = 1000$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 970 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 30 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}, 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,959, 0,981]$. La fréquence observée de comprimés conformes est

$$f = \frac{1000 - 53}{1000} = 0,947.$$

f n'appartient pas l'intervalle de fluctuation. Donc, le contrôle remet en question les réglages faits par le laboratoire au risque de se tromper de 5 %.

