Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

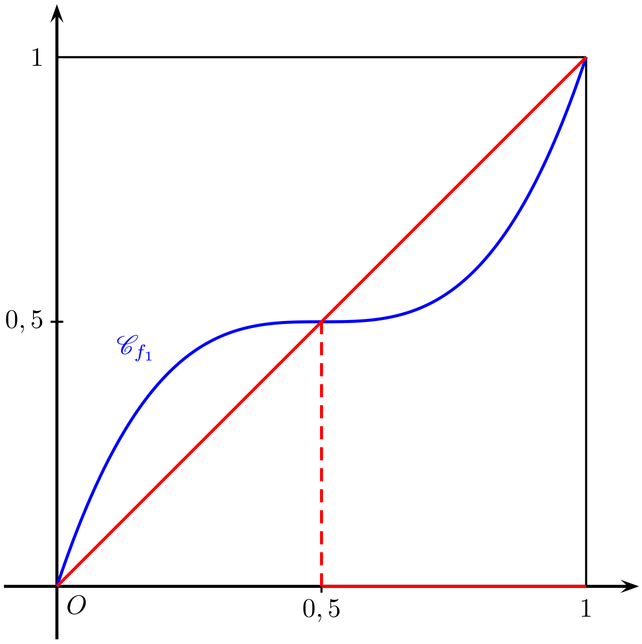
1) a) • $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$.
• La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynôme.
• La fonction f_1 est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2.$$

La fonction f_1' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction f_1 est croissante sur $[0, 1]$.

On a montré que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b) Résolution graphique de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$.



En notant que $f_1(0, 5) = 0, 5$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ est $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ceci signifie que les gris clairs (codés par un réel x inférieur à $0, 5$) sont assombris et les gris foncés (codés par un réel x supérieur à $0, 5$) sont éclaircis.

2) a) Pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, $1 + (e - 1)x \geqslant 1$ et en particulier, $1 + (e - 1)x > 0$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{e - 1}{1 + (e - 1)x} - 1 = \frac{(e - 1) - (1 + (e - 1)x)}{1 + (e - 1)x} = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1],\ g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}.}$$

b) Pour tout réel de $[0, 1]$, $1 + (e - 1)x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x)$ est du signe de $(e - 2) - (e - 1)x$. Or,

$$\begin{aligned}(e - 2) - (e - 1)x > 0 &\Leftrightarrow (e - 2) > (e - 1)x \\ &\Leftrightarrow \frac{e - 2}{e - 1} > x \text{ (car } e - 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{e - 2}{e - 1}.\end{aligned}$$

De même, $(e - 2) - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e - 2}{e - 1}$ avec $\frac{e - 2}{e - 1} = 0,418\ldots$ On note que $\frac{e - 2}{e - 1} \in [0, 1]$. De plus,

$$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)=\ln\left(1+(e-1)\frac{e-2}{e-1}\right)-\frac{e-2}{e-1}=\ln(e-1)-\frac{e-2}{e-1}$$
$$=0,12 \text{ (arrondie au centième).}$$

On peut dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,12\ldots$	$\searrow$	0

On a montré en particulier que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{e-2}{e-1}\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(0),g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right]=[0;0,12\ldots]$, l'équation $g(x)=k$ admet une unique solution dans $\left[0,\frac{e-2}{e-1}\right]$. En particulier, puisque $0,05\in[0;0,12\ldots]$, l'équation $g(x)=0,05$ admet une unique solution notée α dans $\left[0,\frac{e-2}{e-1}\right]$ et même dans $\left]0,\frac{e-2}{e-1}\right[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1},1\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(1),g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right]=[0;0,12\ldots]$, l'équation $g(x)=k$ admet une unique solution dans $\left[\frac{e-2}{e-1},1\right]$. En particulier, puisque $0,05\in[0;0,12\ldots]$, l'équation $g(x)=0,05$ admet une unique solution notée β dans $\left[\frac{e-2}{e-1},1\right]$ et même dans $\left]\frac{e-2}{e-1},1\right[$.

Partie B

1) L'algorithme analyse les 101 nuances de gris codées 0, $0,01$, $0,02$, $\ldots$, $0,99$ et 1. Le compteur c dénombre les nuances de gris où la modification sera effectivement perceptible. C'est ce qu'affiche l'algorithme.

2) On rappelle que $0,08<\alpha<0,09$ et que $0,85<\beta<0,86$. Le tableau de variations de la fonction g établi à la question 2)b) de la partie A montre que la modification est perceptible quand $x\in[\alpha,\beta]$. Donc, l'algorithme compte les valeurs $0,09$, $0,10$, $0,11$, $\ldots$, $0,84$, $0,85$.

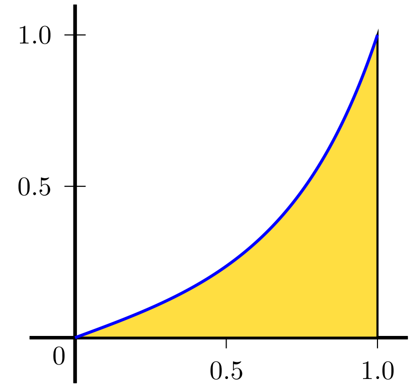
Il revient au même de compter le nombre d'entiers compris au sens large entre 9 et 85. Il y a 85 entiers compris au sens large entre 1 et 85 et 8 entiers compris au sens large entre 1 et 8. Il y a donc $85-8=77$ entiers compris au sens large entre 9 et 85.

Si on l'applique à la fonction f_2, l'algorithme affichera 77.

Partie C

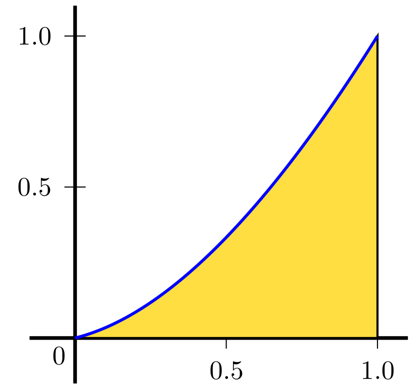
1) a) La fonction f_1 est continue et positive sur $[0,1]$. Donc

$$\mathscr{A}_{f_1}=\int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=0,32 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{).}$$



b) La fonction f_2 est continue et positive sur $[0,1]$. Donc

$$\mathscr{A}_{f_2} = \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right) dx = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 = -13 + 60\ln(5) - 60\ln(4)$$
$$= -13 + 60\ln\left(\frac{5}{4}\right) = -13 + 60\ln(1,25) = 0,39 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{)}.$$



2) Donc, la fonction f_1 est celle qui éclaircit le plus l'image.

