Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.

c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc...

Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 2