Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

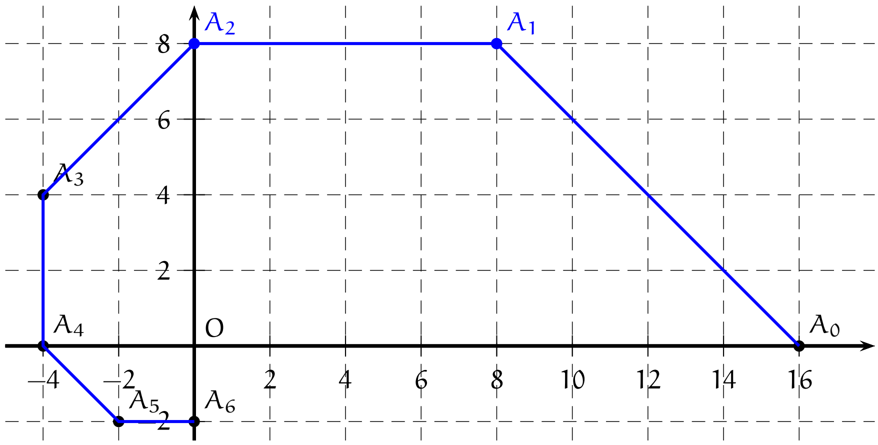
1) a) • $z_1 = \dfrac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$.

• $z_2 = \dfrac{1+i}{2} \times (8+8i) = 4(1+i)^2 = 4(1+2i-1) = 8i$.

• $z_3 = \dfrac{1+i}{2} \times 8i = 4i(1+i) = -4+4i$.

$$\boxed{z_1 = 8+8i,\ z_2 = 8i \text{ et } z_3 = -4+4i.}$$

b)Figure.



c) $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{|1+i|}{2} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ puis

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\boxed{\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

d)

$$OA_1 = |z_1| = |8+8i| = 8|1+i| = 8\sqrt{1^2+1^2} = 8\sqrt{2}$$

et

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8+8i-16| = |-8+8i| = 8|-1+i| = 8\sqrt{(-1)^2+1^2} = 8\sqrt{2}.$$

Donc, $OA_1 = A_0A_1 = 8\sqrt{2}$ et le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1.

D'autre part, $OA_0 = |z_0| = |16| = 16$ puis

$$A_1O^2 + A_1A_0^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 128 + 128 = 256 = 16^2 = 0A_0^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1. Finalement

$$\boxed{\text{le triangle } OA_0A_1 \text{ est isocèle rectangle en } A_1.}$$

2) Soit n un entier naturel. D'après la question 1)c),

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Ceci montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite (r_n) est-elle convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$. Géométriquement cela signifie que la distance du point O au point A_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}A_nA_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2} - 1\right| \times |z_n| = \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times r_n = \frac{|-1+i|}{2} \times r_n\\ &= \frac{\sqrt{(-1)^2+1^2}}{2}r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n\\ &= r_{n+1} \text{ (d'après la question 2)).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : A_nA_{n+1} = r_{n+1}.}$$

b) Puisque la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $r_0 = 16$ et de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on sait que pour tout entier naturel n,

$$r_n = r_0 \times q^n = 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}L_n &= A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n \text{ (d'après la question 3)a))}\\ &= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \ldots + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\\ &= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)\\ &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}8\sqrt{2} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} &= \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{16}{\sqrt{2}-1} = \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\\ &= \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = 16\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ L_n = 16\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right).}$$

c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 16\left(\sqrt{2}+1\right).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.