Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

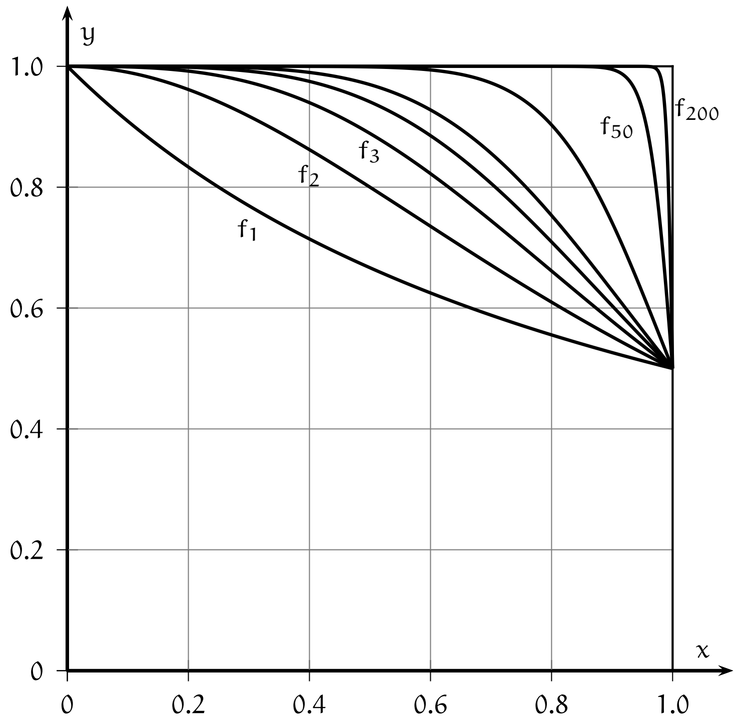
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ dx.$$

1) Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Calculer la valeur exacte de I_1.

3) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^n)\ dx$.

6) À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0

Traitement	Demander un entier $n \geqslant 1$
	Demander un entier $p \geqslant 1$
	Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire :
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	    I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin pour
	Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.