Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction f_n est continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan $\mathscr{D}_n$ compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f_n d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

Le graphique suggère que l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ converge vers l'aire du carré de sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$ ou encore il semble que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ soit convergente de limite 1.

2) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

$$\boxed{I_1 = \ln(2).}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$ puis $1+x^n \geqslant 1$ et donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1] \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.}$$

b) Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx$ avec $\displaystyle\int_0^1 1\,dx = 1 \times (1-0) = 1$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ I_n \leqslant 1.}$$

4) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x de $[0,1]$,

$$\frac{1}{1+x^n} - (1-x^n) = \frac{1-(1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n} = \frac{1-\left(1-x^{2n}\right)}{1+x^n} = \frac{x^{2n}}{1+x^n}.$$

On en déduit que pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^n} - (1-x^n) \geqslant 0$ ou encore $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0,1] \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ 1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.}$$

5) Soit $n \geqslant 1$.

$$\int_0^1 (1-x^n)\ dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

6) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \geqslant \int_0^1 (1-x^n)\,dx = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (I_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 1.}$$

7) a) Valeurs successives obtenues par l'algorithme.

k	x	I
0	0	$0,2$
1	$0,2$	$0,392$
2	$0,4$	$0,565$
3	$0,6$	$0,712$
4	$0,8$	$0,834$

Si $n = 2$ et $p = 5$, l'algorithme renvoie la valeur $0,83$ arrondi au centième.

b) L'algorithme donne une valeur approchée de l'intégrale I_n obtenue par la méthode des rectangles. Dans le cas $n = 2$ et $p = 5$, on a découpé l'intervalle en cinq intervalles de longueur égale à $0,2$ puis on a construit les rectangles de hauteurs respectives $f(0)$, $f(0,2)$, $f(0,4)$, $f(0,6)$ et $f(0,8)$. La somme des aires de ces rectangles est une valeur approchée de I_2 par excès. Cela correspond au graphique suivant :