Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Question 1	**réponse c)**
Question 2	**réponse c)**
Question 3	**réponse d)**
Question 4	**réponse a)**

Explication 1. Les droites des propositions a) et d) sont dirigées par des vecteurs non colinéaires à $\overrightarrow{u}$. Donc les réponses a) et d) sont fausses. Par contre, les droites des propositions b) et c) sont dirigées par des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

Quand $t = -1$ dans la droite de la proposition c), on obtient le point A. Donc la bonne réponse c). Vérifions explicitement que la réponse b) est fausse. Si le point A appartient à la droite de la proposition b), il existe un réel t tel que $-1 + 2t = 1$ ou encore $t = 1$ et aussi $1 - t = -1$ et donc $t = 2$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de la proposition b).

Explication 2. La droite $\mathscr{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}_2(1, -1, -2)$. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{n} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc la droite $\mathscr{D}_2$ est sécante au plan $\mathscr{P}$. La réponse a) est fausse.

Soit $M(1 + t, -3 - t, 2 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}_2$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + t) + (-3 - t) - (2 - 2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}.$$

Quand $t = -\frac{2}{3}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. On sait que la proposition a) est fausse.

On rappelle qu'un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$. D'autre part, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(0, 2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, 4, 2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan. Ensuite,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 1 \times 4 + (-1) \times 2 = -2 + 4 - 2 = 0$$

.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. La proposition c) est donc fausse.

$2x_A + y_A - z_A + 5 = 2 - 1 + 1 + 5 = 7 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$. On en déduit que la proposition b) est fausse et la proposition d) est vraie.

Explication 4. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$.
Ensuite, $AB = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$. Donc

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{12}{2\sqrt{2} \times \sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{42}}.$$

La calculatrice fournit une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$: $\widehat{BAC} = 22,2\,°$ arrondi au dixième de degré. La bonne réponse est la réponse a).