Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1) a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin tant que
Sortie	Afficher n

