

# Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie A

- 1) Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de  $g(x)$ .

- 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- 3) On appelle  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

- 4) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 5) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que  $-1 < \alpha < 0$ .

- 6) a) Démontrer que la droite  $T$  d'équation  $y = 2x + 1$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $T$ .

### Partie B

- 1) Soit  $H$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Démontrer que  $H$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = xe^{-x}$ .

- 2) On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $T$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$ .

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .