# Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement de spécialité

**EXERCICE 3 : corrigé**

**Partie A**

**1)** Soit $n$ un entier naturel. A l'heure $n+1$, à la station A, il n'y a plus que 20 % des vélos présents à l'heure $n$, soit $0,2a_n$, et d'autre part, 10 % des vélos présents à la station B sont maintenant à la station A, soit $0,1b_n$. Au total, $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,1b_n$. De même, $b_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_n$ et donc

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2a_n + 0,1b_n \\ 0,6a_n + 0,3b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times U_n,$$

avec $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

**2)** $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$.

$U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$.

**3)** $U_3 = M \times U_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 8 + 0,1 \times 24 \\ 0,6 \times 8 + 0,3 \times 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$U_4 = M \times U_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 4 + 0,1 \times 12 \\ 0,6 \times 4 + 0,3 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$U_5 = M \times U_4 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 2 + 0,1 \times 6 \\ 0,6 \times 2 + 0,3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Au bout de cinq heures, il ne reste plus qu'un vélo dans la station A.

**Partie B**

**1) a)** Soit $V$ une matrice colonne à deux lignes.

$$V = M \times V + R \Leftrightarrow V - M \times V = R \Leftrightarrow (I - M) \times V = R \Leftrightarrow N \times V = R.$$

**b)**

$$NV = R \Rightarrow N^{-1}NV = N^{-1}R \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 42+2 \\ 36+16 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

**2) a)** Soit $n$ un entier naturel.

$$W_{n+1} = V_{n+1} - V = (M \times V_n + R) - (M \times V + R) = M \times (V_n - V) = M \times W_n.$$

**b)** Soit $n$ un entier naturel non nul. $W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ puis

$$V_n = W_n + V = M^n \times W_0 + V$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 52 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

**c)** Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 44$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 52$.

Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a tendance à se stabiliser : autour de 44 vélos dans la station A et 52 vélos dans la station B.

 