Amérique du sud 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explication 1 : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1, -3, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, -2, -1)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 2 \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc, les réponses a) et c) sont fausses.

- $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
- $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \neq \sqrt{14}$.

Donc la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse b). Vérifions-le explicitement.

$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = AB$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

Explication 2 : Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -1, 3)$. Les droites des propositions a) et b) sont dirgées respectivement par le vecteur de coordonnées $(2, 1, 3)$ et par le vecteur de coordonnées $(2, 5, -1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc les réponses a) et b) sont fausses.

Quand $t = 2$ dans la représentation paramétrique c), on obtient $(2, 5, -1)$ qui sont les coordonnées du point A. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions explicitement que la réponse d) est fausse.

Si le point A appartient à la droite d), il existe un réel t tel que $1 + 2t = 2$ et $4 - t = 5$ ou encore $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = -1$ ce qui est impossible. Donc la réponse d) est effectivement fausse.

Explication 3 : On sait que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 4 : Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points I, J, M et N sont $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les points I et J sont dans le plan d'équation $z = 1$ et les points M et N sont dans le plan d'équation $z = \dfrac{1}{2}$. Ces plans n'ont pas de point commun et donc les droites (IJ) et (MN) n'ont pas de point commun. Les réponses a) et b) sont fausses.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La réponse d) est fausse.

Donc la bonne réponse est la réponse c). Vérifions-le explicitement.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = 0.$$

Donc les droites (IJ) et (MN) sont effectivement orthogonales.