Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) La calculatrice fournit $P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954$ à 10^{-3} près.

$$P(410 \leqslant X \leqslant 450) = 0,954 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2) Posons $Z = \dfrac{Y - 69}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Un ballon est conforme à la législation si et seulement si Y appartient à l'intervalle $[68, 70]$. Or,

$$68 \leqslant Y \leqslant 70 \Leftrightarrow -1 \leqslant Y - 69 \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{Y-69}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}.$$

L'énoncé dit que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ou encore $p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97$.

$$p(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(-\frac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 2,17 \Leftrightarrow \sigma = 0,46 \text{ au centième près.}$$

$$\boxed{\sigma = 0,46 \text{ au centième près.}}$$

Partie B

Notons F la variable aléatoire égale à la fréquence de ballons conformes à la réglementation.
Ici, $n = 250$ et on suppose que $p = 0,98$. On note tout d'abord que $n \geqslant 30$. Ensuite, $np = 245$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 5$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

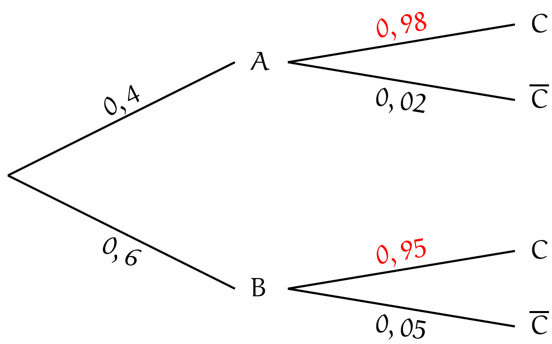
$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}; 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,962; 0,998]$.

La fréquence observée est $f = \dfrac{233}{250} = 0,932\ldots$ Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise au risque de se tromper de 5 %.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $p(A \cap C)$.

$$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = p(A) \times \left(1 - p_A\left(\overline{C}\right)\right) = 0,4 \times (1 - 0,02) = 0,392.$$

$$\boxed{p(A \cap C) = 0,392.}$$

3) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(A \cap C) + p\left(\overline{A} \cap C\right) = p(A) \times p_A(C) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(C) \\ &= 0,4 \times 0,98 + 0,6 \times 0,95 = 0,962. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(C) = 0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_{\overline{C}}(A)$.

$$p_{\overline{C}}(A) = \frac{p\left(\overline{C} \cap A\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \frac{p(A) \times p_A\left(\overline{C}\right)}{1 - p(C)} = \frac{0,4 \times 0,02}{1 - 0,962} = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_{\overline{C}}(A) = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

