

# France métropolitaine. Septembre 2013. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .

- 1)
  - a) Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . On pourra en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
  - b) Vérifier que si  $n$  est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors  $u_n - 1$  a le même signe que  $(-1)^n$ .
  - c) Établir que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$ .
  - d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n - 1$  a le même signe que  $(-1)^n$ .
- 2) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ .
  - a) Établir que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$ .
  - b) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .  
En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ .  
Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .