

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) $u_1 = \frac{u_0 + 2}{2u_0 + 1} = \frac{2 + 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8.$

$$u_2 = \frac{\frac{4}{5} + 2}{2 \times \frac{4}{5} + 1} = \frac{14}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{14}{13} = 1,07 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$u_3 = \frac{\frac{14}{13} + 2}{2 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{40}{13} \times \frac{13}{41} = \frac{40}{41} = 0,97 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$u_4 = \frac{\frac{40}{41} + 2}{2 \times \frac{40}{41} + 1} = \frac{122}{41} \times \frac{41}{121} = \frac{122}{121} = 1,00 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b) $u_0 - 1 > 0$ et $(-1)^0 > 0$, $u_1 - 1 < 0$ et $(-1)^1 < 0$, $u_2 - 1 > 0$ et $(-1)^2 > 0$, $u_3 - 1 < 0$ et $(-1)^3 < 0$, $u_4 - 1 > 0$ et $(-1)^4 > 0$.

Donc, si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

d) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

• On a vu que $u_0 - 1$ a le même signe que $(-1)^0$. La proposition à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n - 1$ ait le même signe que $(-1)^n$ et montrons que $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

D'après la question précédente, $u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n - 1}{2u_n + 1}$. Il est admis dans l'énoncé que $u_n > 0$ et donc $2u_n + 1 > 0$.

Par suite, $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-(u_n - 1)$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-(-1)^n$ ou encore que $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \frac{-(u_n - 1)}{3(u_n + 1)} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = -\frac{1}{3}v_n.$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ et de raison $q = -\frac{1}{3}$. Donc pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

c) On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

Puisque $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times 0}{1 - \frac{1}{3} \times 0} = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$