France métropolitaine. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) réponse b)

2) réponse b)

3) réponse a)

4) réponse c)

Justification 1. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(3,2,1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(-2,3,0)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 3\times(-2)+2\times 3+1\times 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(5-2t, 1+3t, 4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$3(5-2t)+2(1+3t)+(4)-6 = 0t+15 = 15\neq 0.$$

Aucun point de la droite $\mathscr{D}$ n'appartient au plan $\mathscr{P}$. Donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ mais n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

Remarque. La réponse c) ne pouvait pas être exacte car alors les réponses b) et c) auraient été exactes ce qui est exclu.

Justification 2. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}=(2,-1,2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. On sait alors que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M(5-2t, 1+3t, 4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$ et $M'(3+2t', 1-t', 1+2t')$, $t'\in\mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}'$.

$$M=M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5-2t=3+2t' \\ 1+3t=1-t' \\ 4=1+2t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'=\dfrac{3}{2} \\ 5-2t=3+2\times\dfrac{3}{2} \\ 1+3t=1-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'=\dfrac{3}{2} \\ t=-\dfrac{1}{2} \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'=\dfrac{3}{2} \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Pour $t=-\dfrac{1}{2}$ (ou $t'=\dfrac{3}{2}$), on obtient le point A de coordonnées $\left(6,-\dfrac{1}{2},4\right)$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en A et donc la bonne réponse est la réponse b).

Justification 3. Soit M un point du plan, d'affixe z. Posons $z=x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |x+i(y+1)|^2=|x+i(y-1)|^2 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow y^2+2y+1=y^2-2y+1 \Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0.$$

$\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses et donc la bonne réponse est la réponse a).

Justification 4. $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \left|\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \sqrt{2}$. D'autre part, $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \dfrac{|c|}{|b|} = \dfrac{OC}{OB}$. Donc $OC=\sqrt{2}OB$. Puisque $B\neq O$, le triangle OBC n'est pas isocèle en O.

$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = (1+i)$ puis $c=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}c = (1+i)b$. Mais alors

$$BC=|c-b|=|(1+i)b-b|=|ib|=|i|\times|b|=1\times OB=0B.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle en B. Enfin,

$$BC^2+BO^2=BO^2+BO^2=2BO^2=\left(\sqrt{2}B0\right)^2=OC^2.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle et rectangle en B. La bonne réponse est la réponse c).