France métropolitaine Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Sur le graphique, on lit : la fonction f est strictement négative sur $]-\infty, -2[$, strictement positive sur $]-2, +\infty[$ et s'annule en -2.

2) a) F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.
Sur le graphique, on lit : $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$.

b) Sur la courbe $\mathscr{C}_3$, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $\dfrac{3}{2}$ et n'est pas 2. La courbe $\mathscr{C}_3$ n'est pas la bonne courbe.
Sur la courbe $\mathscr{C}_2$, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2 est environ -1 et n'est pas 0. La courbe $\mathscr{C}_2$ n'est pas la bonne courbe.

La bonne courbe est la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables ur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left(1 + \frac{1}{2}(x+2)\right) e^{\frac{1}{2}x} = \frac{x+4}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}.}$$

b) Pour tout réel x, $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x+4$. Donc la fonction f' est négative sur $]-\infty, -4]$ et positive sur $[-4, +\infty[$.

Par suite, la fonction f est décroissante sur $]-\infty, -4]$ et croissante sur $[4, +\infty[$. On en déduit que la fonction f admet un minimum en -4. Ce minimum est égal à

$$f(-4) = (-4+2)e^{\frac{1}{2}\times(-4)} = -2e^{-2}.$$

$$\boxed{f \text{ admet un minimum en } -4 \text{ égal à } -2e^{-2}.}$$

2) a) La fonction f est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Le nombre I est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Pour tout réel x

$$\begin{aligned} 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) &= 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{1}{2}x} \\ &= (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x). \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_0^1 2\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx = [2u(x)v(x)]_0^1 = 1 \times 2\left(e^{\frac{1}{2}} - 0 \times e^0\right) = 2e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{I = 2e^{\frac{1}{2}}.}$$

3) a) Quand $n = 3$, la valeur de s affichée par l'algorithme est

$$s_3 = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Puisque chaque rectangle a la même largeur, la largeur commune de ces rectangles est $\dfrac{1}{3}$ et donc s_3 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique fourni dans l'énoncé.

b) Quand n devient grand, s_n est une bonne approximation de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.