Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A : modélisation et simulation

1) Le couple $(-1, 1)$ ne peut pas être obtenu car x démarre à 0 et progresse de 1 à partir de chaque étape de l'algorithme. x ne peut donc prendre la valeur -1.
Le couple $(10, 0)$ peut être obtenu par exemple si n prend la valeur 0 à chaque étape de l'algorithme.
Le couple $(2, 4)$ ne peut pas être obtenu car pour obtenir $y = 4$, il a fallu d'abord obtenir $y = 3$ et avant $y = 2$. Mais l'algorithme s'arrête si y prend la valeur 2.
Le couple $(10, 2)$ peut être obtenu avec le parcours $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $4, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(7, 0)$, $(8, 0)$, $(9, 1)$ et $(10, 2)$.

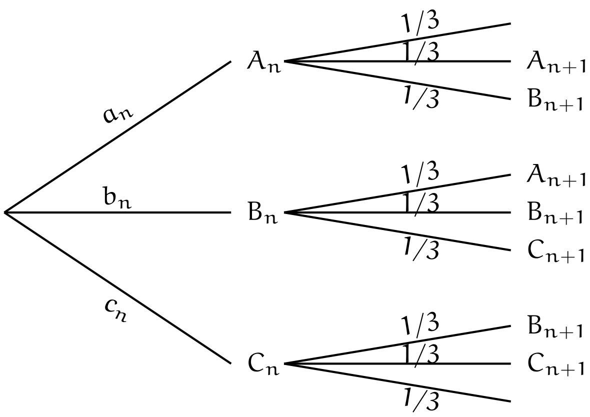
2) Algorithme modifié.

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$ et $x \leqslant 9$
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur $y + n$
    Affecter à x la valeur $x + 1$
Fin tant que
Si $x = 10$
    Afficher « Tom a réussi la traversée »
    Sinon afficher « Tom est tombé »
Fin si

Partie B

1) Tom démarre du point de coordonnées $(0, 0)$. Donc, il est sûr qu'après 0 déplacement, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0. Ceci montre que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

2) Représentons la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p\left(A_{n+1}\right) = p\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + p\left(B_n \cap A_{n+1}\right) = p\left(A_n\right) \times p_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + p\left(B_n\right) \times p_{B_n}\left(A_{n+1}\right) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n}{3}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= p\left(B_{n+1}\right) = p\left(A_n \cap B_{n+1}\right) + p\left(B_n \cap B_{n+1}\right) + p\left(C_n \cap B_{n+1}\right) \\ &= p\left(A_n\right) \times p_{A_n}\left(B_{n+1}\right) + p\left(B_n\right) \times p_{B_n}\left(B_{n+1}\right) + p\left(C_n\right) \times p_{C_n}\left(B_{n+1}\right) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}. \end{aligned}$$

3) $p(A_1) = a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{3} = \dfrac{1}{3}$, $p(B_1) = b_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \dfrac{1}{3}$ et bien sûr, $p(C_1) = p(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

4) Tom est sur le pont au bout de deux déplacements si et seulement si Tom est sur le pont au bout de un déplacement et se trouve sur un point d'ordonnée -1, 0 ou 1 au bout de deux déplacements.
L'événement « Tom est sur le pont au bout de un déplacement » est certain. La probabilité demandée est donc

$$p(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = p(A_2) + p(B_2) + p(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = 2a_2 + b_2.$$

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \dfrac{1}{3}$. Donc la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est

$$2 \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est égale à $\dfrac{7}{9}$.

5) De même, la probabilité que Tom traverse le pont est la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de dix déplacements. Cette probabilité est

$$a_{10} + b_{10} + c_{10} = 2 \times 0,040\,272 + 0,056\,953 = 0,137\,497.$$

La probabilité que Tom traverse le pont est égale à $0,13$ à 10^{-2} près.

