

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A : Étude du cas $k = 1$

1) Limite de f en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty.$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x ,

$$f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet l'axe (Ox) pour asymptote en $+\infty$.

2) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'_1(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x , $f'_1(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
f_1	$-\infty$	e^{-1}	0

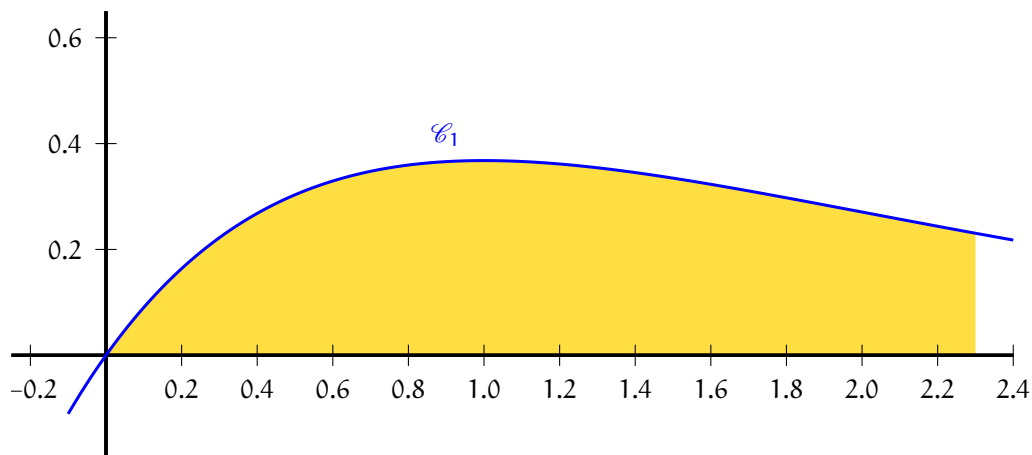
3) La fonction g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'_1(x) = -(1 \times e^{-x} + (x + 1) \times (-1) \times e^{-x}) = -(1 - x - 1)e^{-x} = xe^{-x} = f_1(x).$$

Donc la fonction g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x , $f_1(x)$ est du signe de x . La fonction f_1 est donc strictement négative sur $] -\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

5) La fonction f_1 est continue et positive sur l'intervalle $[0, \ln 10]$.



Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 10} f_1(x) \, dx = [g_1(x)]_0^{\ln 10} = (-(\ln 10 + 1)e^{-\ln 10}) - (-(0 + 1)e^0) \\ &= -(\ln 10 + 1)\frac{1}{e^{\ln 10}} + 1 = 1 - \frac{\ln 10 + 1}{10} = \frac{9 - \ln 10}{10}.\end{aligned}$$

Partie B : Propriétés graphiques

1) Pour tout réel k strictement positif, $f_k(0) = 0$ et donc pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathcal{C}_k$ passe par O .

2) a) Soit k un réel strictement positif. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'_k(x) = k(1 \times e^{-kx} + x \times (-k) \times e^{-kx}) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

b) Pour tout réel x , $f'_k(x)$ est du signe de $1 - kx$. Par suite, puisque $k > 0$, la fonction f'_k est strictement positive sur $\left]-\infty, \frac{1}{k}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{k}, +\infty\right[$ et s'annule en $\frac{1}{k}$.

On en déduit que la fonction f_k admet un maximum en $\frac{1}{k}$ et que ce maximum est égal à

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k \times \frac{1}{k}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

c) L'abscisse du sommet de la courbe $\mathcal{C}_a$ est environ $0,1 = \frac{1}{10}$ et donc

a est environ égal à 10.

d) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O est $y = f'_k(0)(x - 0) + f_k(0)$ avec $f_k(0) = 0$ et $f'_k(0) = k(1 - 0)e^0 = k$. Donc une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O est $y = kx$.

e) Le coefficient directeur de T est $\frac{0,6}{0,2} = 3$ et le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O est b . Donc

b = 3.