Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

Partie A

1) $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - (X < 390) = P(X \leqslant 410) - (X \leqslant 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$.

$$\boxed{P(390 \leqslant X \leqslant 410) = 0,636.}$$

2)

$$p = p\,(X \geqslant 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - p(X \leqslant 385) = 1 - 0,086 = 0,914.$$

$$\boxed{p = 0,914.}$$

3) Posons $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 400}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0.

$$X \geqslant 385 \Leftrightarrow X - 400 \geqslant -15 \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant -\frac{15}{\sigma} \Leftrightarrow Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $p(Z \leqslant -1,751) = 0,04$ (arrondi au millième) ou encore $p(Z \geqslant -1,751) = 0,96$. Par suite,

$$p(X \geqslant 385) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = 0,96 \Leftrightarrow p\left(Z \geqslant -\frac{15}{\sigma}\right) = p(Z \geqslant -1,751).$$

D'après le cours, on sait que cette dernière égalité équivaut à $-\dfrac{15}{\sigma} = -1,751$ ou encore $\sigma = \dfrac{15}{1,751}$ ou enfin

$$\boxed{\sigma = 8,6 \text{ arrondi au dixième.}}$$

Partie B

1) Ici, $n = 300$ et $p = 0,96$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 288$ et $n(1-p) = 12$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,96 - 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}, 0,96 + 1,96\frac{\sqrt{0,96 \times 0,04}}{\sqrt{300}}\right].$$

En arrondissant les bornes à 10^{-3} près de manière à élargir un peu cet intervalle, on trouve

$$\boxed{I = [0,937; 0,983].}$$

2) Faisons l'hypothèse que la proportion de pains commercialisables est $p = 0,96$. La fréquence de pains commercialisables observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{283}{300}$ ou encore $0,943$ arrondi au millième.

f appartient à l'intervalle de fluctuation I. On peut donc accepter l'hypothèse faite sur p mais on ne connaît pas le risque de se tromper ou encore

$$\boxed{\text{on peut décider que l'objectif est atteint mais on ne connaît pas le risque de se tromper.}}$$

Partie C

1) On sait que pour tout réel t,

$$p\,(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p\left(T \geqslant t\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

L'énoncé donne $p(T \geqslant 30) = 0,913$. Par suite,

$$\begin{aligned} p\left(T \geqslant 30\right) = 0,913 &\Leftrightarrow e^{-30\lambda} = 0,913 \\ &\Leftrightarrow -30\lambda = \ln\left(0,913\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,913)}{30}. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\lambda = 0,003 \text{ arrondi au millième.}}$$

Dans toute la suite, on prendra $\lambda = 0,003$.

2) La probabilité demandée est $p_{X \geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right)$.

$$\begin{aligned} p_{X\geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right) &= \frac{p\left((X \geqslant 60) \cap (X \geqslant 90)\right)}{p\left(X \geqslant 60\right)} = \frac{p\left(X \geqslant 90\right)}{p\left(X \geqslant 60\right)} \\ &= \frac{e^{-0,27}}{e^{-0,18}} = e^{-0,27-(-0,18)} = e^{-0,09}. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{p_{X\geqslant 60}\left(X \geqslant 90\right) = e^{-0,09} = 0,914 \text{ arrondi au millième.}}$$

3) En considérant qu'une année compte 365 jours, la probabilité que la balance ne se dérègle pas avant un an est $p(X \geqslant 365)$. Or,

$$p(X \geqslant 365) = e^{-0,003\times 365} = e^{-1,095} = 0,335 \text{ arrondi au millième.}$$

Cette probabilité est nettement inférieure à $0,5$ ou encore il y a nettement moins d'une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an.

Soit t un réel.

$$p(X \geqslant t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,003t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,003t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,5)}{0,003}.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{\ln(0,5)}{0,003} = 231,04\ldots$ soit environ 231 jours ou encore 7 mois et demi environ.

$$\boxed{\text{Il y a une chance sur deux que la balance ne se dérègle pas avant } 231 \text{ jours.}}$$

