

Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(1, -1, -1)$ et $(2, -5, -3)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ à partir de la première coordonnée et $-k = -5$ ou encore $k = 5$ à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et il n'existe donc pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Ainsi, les trois points A, B et C définissent un unique plan.

a)

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

et

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au plan (ABC) ou encore

la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) Le plan (ABC) est le plan passant par A(0, 4, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 3)$. Une équation cartésienne de ce plan est $2(x - 0) - (y - 4) + 3(z - 1) = 0$ ou encore

une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Δ est la droite passant par D(7, -1, 4) et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d) Soit $M(7 + 2t, -1 - t, 4 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées (3, 1, -2).

Le point H a pour coordonnées (3, 1, -2).

3) a) $\mathcal{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}_1(1, 1, 1)$ et $\mathcal{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}_2(1, 4, 0)$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires et donc

les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en une droite.

b) Soit $M(-4t - 2, t, 3t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d.

$$(-4t - 2) + (t) + (3t + 2) = 0$$

et

$$(-4t - 2) + 4(t) + 2 = 0.$$

Ainsi, tout point de d appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et donc

la droite d est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

c) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\vec{u}'(-4, 1, 3)$ et un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\vec{u}(2, -1, 3)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0.$$

On en déduit que

la droite d est parallèle au plan (ABC) .