

Pondichéry 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux. Pour tout entier naturel n , on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation. Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0,125j_n + 0,525a_n \\ a_{n+1} = 0,625j_n + 0,625a_n \end{cases} .$$

On introduit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n, U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} .$$

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.
b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0 .
- 2) On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n .
- 3) On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

- a) En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
- b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?