Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse a)

4) réponse b)

Explication 1. L'ensemble de répresentation paramétrique a) est une droite et ne convient donc pas.

Le plan de représentation c) passe par le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ (obtenu pour $t = t' = 0$). Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + 5 = 6 \neq 0$. La représentation c) ne convient pas.

Le plan de représentation d) passe par le point de coordonnées $(1, 1, -1)$. Ce point n'appartient pas au plan (P) car $1 \times 1 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 1 \neq 0$. La représentation d) ne convient pas.

Une représentation paramétrique du plan (P) est donc la représentation b) : $\left\{\begin{array}{l} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{array}\right.$.

Vérifions-le explicitement. Le plan de représentation b) passe par le point de coordonnées $(0, 1, -1)$.
Puisque $1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 5 = 0$, ce point appartient au plan (P).
Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, -2, 3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -1, -1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 1, 0)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b). Or,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan de représentation b) qui a par ailleurs un point commun avec le plan (P). Le plan (P) est donc effectivement le plan de représentation b). La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. Soient $t \in \mathbb{R}$ puis $M(-2 + t, -t, -1 - t)$ un point quelconque de (D).

$$(-2 + t) - 2(-t) + 3(-1 - t) + 5 = t + 2t - 3t - 2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc $M \in (P)$. Ainsi, tout point de (D) appartient à (P) ou encore la droite (D) est une droite du plan (P). La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2, -4, 6)$. La droite (D) admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MN}$ et donc les droites (MN) et (D) ne sont pas parallèles. Ceci élimine les propositions b) et d).

D'autre part

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MN} = 1 \times 2 + (-1) \times (-4) + (-1) \times 6 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

Donc, les droites (D) et (MN) sont orthogonales. La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Soit $Q(-2 + t + 2t', -t - 2t', -1 - t + 3t')$, t et t' réels, un point de (S).

$$Q \in (P) \Leftrightarrow (-2 + t + 2t') - 2(-t - 2t') + 3(-1 - t + 3t') + 5 = 0 \Leftrightarrow 15t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0.$$

Les points communs aux plans (P) et (S) sont les points de coordonnées $(-2 + t, -t, -1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. $(P) \cap (S)$ est donc la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. On note que $(P) \cap (S)$ et (Δ) admettent un vecteur directeur commun à savoir le vecteur de coordonnées $(1, -1, -1)$. Donc $(P) \cap (S)$ est une droite parallèle à (Δ).
Enfin, le point de coordonnées $(0, -2, -3)$ est un point commun à $(P) \cap (S)$ (obtenu pour $t = 2$) et à (Δ) (obtenu pour $t = 0$). Donc $(P) \cap (S)$ est la droite (Δ). La bonne réponse est la réponse b).

