

Polynésie 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) a)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = M \times u_n + P. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = M \times u_n + P.$$

2) a) $I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} (I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \times 4 - 0,2 \times 1 & 0,3 \times 2 - 0,2 \times 3 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 \times 1 & -0,1 \times 2 + 0,4 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

b) Ainsi, $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On sait alors que

$$\text{la matrice } I - M \text{ est inversible et } (I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Soit U une matrice colonne de format 2.

$$\begin{aligned} U &= M \times U + P \Leftrightarrow U - MU = P \Leftrightarrow (I - M)U = P \Leftrightarrow U = (I - M)^{-1}P \\ &\Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 4 \times 60 + 2 \times 70 \\ 1 \times 60 + 3 \times 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$V_{n+1} = u_{n+1} - u = (Mu_n + P) - (Mu + P) = Mu_n - Mu = M(u_n - u) = M \times V_n.$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$.

- $M^0 \times V_0 = I \times V_0 = V_0$. Donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $V_n = M^n \times V_0$ et montrons que $V_{n+1} = M^{n+1} \times V_0$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= M \times V_n \\ &= M \times (M^n \times V_0) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (M \times M^n) \times V_0 = M^{n+1} \times V_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, V_n = M^n \times V_0.$$

4) a) Pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u + v_n = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 - \frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ 270 - \frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout entier naturel n , $a_n = 380 - \frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n$.

Puisque $-1 < 0,8 < 1$ et $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 380.$$

b) A long terme, le nombre d'abonnés de l'opérateur A se stabilisera autour de 380 000 abonnés.